Podstawy Automatyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

Ćwiczenie 1

Modelowanie i identyfikacja procesu cieplnego[1]

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów ze sposobem identyfikacji procesu cieplnego w oparciu o odpowiedź czasową obiektu. Wynikiem ćwiczenia jest utworzenie modelu procesu grzewczego w formie transmitancji operatorowej. Wykonując ćwiczenie, rozpatrywane będą takie pojęcia jak: pomiar temperatury, układ inercyjny I-go rzędu, odpowiedź czasowa.

1 Wiadomości teoretyczne

Utrzymywanie stałego poziomu temperatury ma olbrzymie znaczenie zarówno w procesach przemysłowych (np. topienie tworzywa do formy wtryskowej, utrzymywanie temperatury w chłodziarni spożywczej), laboratoryjnych (np. kontrolowane podgrzewanie roztworu chemicznego) jak i domowych (np. regulacja temperatury żelazka lub całego mieszkania). Jakość utrzymania stałej temperatury w czasie trwania danego procesu często rzutuje na jakość uzyskiwanego produktu. Regulacja temperatury ma także kluczowe znaczenie wśród organizmów żywych, czego dobrym przykładem jest człowiek. Ciało ludzkie utrzymuje przez całe życie średnią temperaturę wynoszącą około $310{,}15\,\mathrm{K} = 37\,^{\circ}\mathrm{C}$. Termoreceptory rozmieszczone w organizmie sygnalizują wszelkie nieprawidłowości, które w miarę możliwości korygowane są poprzez odpowiednią zmianę dopływu krwi, pocenie się, skurcze mięśni, itp.

Zastosowanie układu regulacji automatycznej (URA) do stabilizacji temperatury w procesie technologicznym także wymaga receptora (sensora), dającego informację o aktualnym stanie cieplnym układu oraz elementu wykonawczego (np. grzałki lub chłodnicy), który posłuży do modyfikacji tego stanu.

1.1 Temperatura w ujęciu fizykalnym

Temperaturą nazywamy wielkość fizyczną reprezentującą stan cieplny układu. Według kinetycznej teorii gazów jest ona proporcjonalna do średniej energii kinetycznej ruchu i drgań cząstek wchodzących w skład układu. Jednostką temperatury w układzie SI jest $1\,\mathrm{K}$ (wymawiamy „jeden kelwin" - bez słowa „stopień").

Temperatura danego ciała zależy od jego pojemności cieplnej oraz ilości dostarczonej do niego energii. Dla pewnego przedziału temperatur, dla których pojemność cieplna układu pozostaje niezmienna, możemy zapisać:

$$\mathrm{d}T_+ = \frac{\mathrm{d}Q_+}{C} = \frac{\mathrm{d}Q_+}{mc}, \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{d}T_+\,[\mathrm{K}]$ stanowi elementarny przyrost temperatury, $\mathrm{d}Q_+\,[\mathrm{J}]$ oznacza porcję energii dostarczoną ze źródła, $C\,[\mathrm{J/K}]$ oznacza pojemność cieplną ciała, natomiast $c\,[\mathrm{J/kg\cdot K}]$ oraz $m\,[\mathrm{kg}]$ oznaczają odpowiednio ciepło właściwe oraz masę ogrzewanego ciała.

[1] Opracował: mgr inż. Mateusz Przybyła

W przypadku poniższego ćwiczenia, elementem wykonawczym jest grzałka elektryczna w postaci żarówki halogenowej, zasilanej prądem stałym. Ciepło dostarczane do układu za pomocą grzałki jest powiązane z jej mocą następującą zależnością:

$$\frac{\mathrm{d}Q_+}{\mathrm{d}t} = P, \tag{2}$$

gdzie $P\,[\mathrm{W}]$ oznacza moc żarówki[2]. Około 90% energii dostarczanej do włókna żarówki zamieniane jest na postać cieplną. Podstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}T_+}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{mc}. \tag{3}$$

Zakładając, że źródło energii zapewnia stałą moc ($P = \mathrm{const.}$) otrzymujemy następujące rozwiązanie powyższego równania różniczkowego:

$$\int \mathrm{d}T_+ = \int \frac{P}{mc}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$T_+(t) = \frac{P}{mc}t + T_0, \tag{5}$$

gdzie $T_0\,[\mathrm{K}]$ wyraża temperaturę początkową grzałki. Można się zatem spodziewać liniowego przyrostu temperatury grzałki względem czasu po podłączeniu zasilania.

W rzeczywistości energia cieplna układu podlega ciągłej wymianie z otoczeniem poprzez:

- przewodnictwo, czyli bezpośredni kontakt molekuł,
- promieniowanie, czyli emisję fal elektromagnetycznych,
- konwekcję, będącą wynikiem działania przewodnictwa i przyciągania grawitacyjnego[3].

W ogólności, ubytek energii cieplnej układu w czasie jest wprost proporcjonalny do gradientu temperatur na granicy ciało-otoczenie:

$$\frac{\mathrm{d}Q_-}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_{ot}), \tag{6}$$

gdzie $k\,[\mathrm{W/K}]$ oznacza pewien współczynnik proporcjonalności, natomiast $T_{ot}\,[\mathrm{K}]$ oznacza temperaturę otoczenia. W przypadku obiektu otoczonego warstwą izolacyjną o grubości $d\,[\mathrm{m}]$ i powierzchni wymiany ciepła $S\,[\mathrm{m}^2]$ (rysunek 1) wzór (6) przybiera postać:

$$\frac{\mathrm{d}Q_-}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda S}{d}(T - T_{ot}). \tag{7}$$

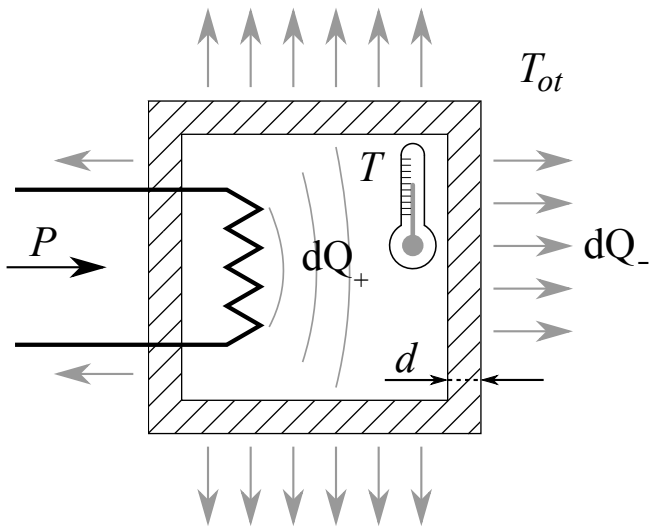
W powyższym wzorze $\lambda\,[\mathrm{W/m \cdot K}]$ jest współczynnikiem przewodności cieplnej izolatora. Wykonując podstawienie analogiczne do (1), zmianę temperatury wskutek wymiany energii z otoczeniem możemy przedstawić jako:

$$\frac{\mathrm{d}T_-}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda S}{dmc}(T - T_{ot}). \tag{8}$$

Jest to tzw. prawo stygnięcia Newtona. Im większą temperaturę ma ciało, tym szybciej oddaje ono ciepło do otoczenia. Po pewnym czasie trwania procesu dochodzi do zrównania się energii

[2] Do obliczeń związanych z temperaturą należy korzystać ze wzoru na moc w postaci $P = UI$, gdzie $U\,[\mathrm{V}]$ oznacza napięcie, zaś $I\,[\mathrm{A}]$ natężenie prądu płynącego przez żarnik. Nie należy wykorzystywać wzorów na moc elektryczną wynikających z prawa Ohma: $P = \frac{U^2}{R} = I^2R$, gdzie $R\,[\Omega]$ oznacza opór grzałki, gdyż wartość rezystancji żarnika silnie zależy od jego temperatury.

[3] Ruch konwekcyjny dobrze opisuje prawo Archimedesa. Rozgrzana masa rozszerza się co skutkuje spadkiem gęstości. Przyciąganie grawitacyjne Ziemi przemieszcza gęstsze masy w dół, a te z kolei wypychają masy rzadsze w górę. Przykładem zastosowania konwekcji są loty balonami.



Rysunek 1: Schematyczne przedstawienie procesu grzewczego.

dostarczanej (2) i traconej (7). Skutkuje to ustaleniem się temperatury na stałym poziomie. Bilans zmian temperatury przedstawia następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T_+ + T_-)}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{mc} - \frac{\lambda S}{dmc}(T - T_{ot}). \tag{9}$$

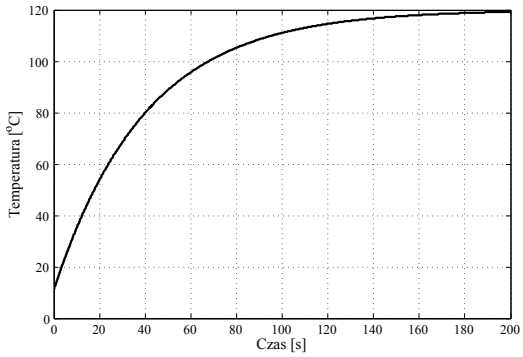
Wprowadzając nowe parametry: $\tau = \frac{dmc}{\lambda S}$ oraz $\kappa = \frac{d}{\lambda S}$ możemy równanie (9) zapisać jako:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\left(T - T_{ot} - \kappa P\right). \tag{10}$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$T(t) = T_{ot} + \kappa P + \left(T_0 - T_{ot} - \kappa P\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{11}$$

Warto sprawdzić, że powyższe równanie spełnia warunek początkowy $T(0) = T_0$. Przykładowy proces nagrzewania przedstawiono na rysunku 2. Po wyłączeniu źródła zasilania grzałka stygnie,

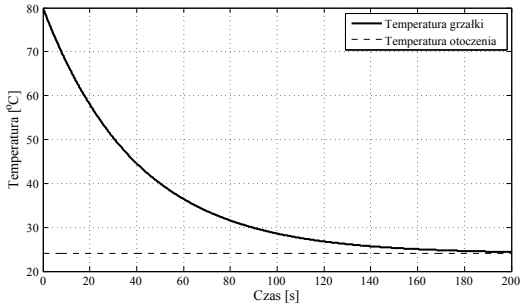


Rysunek 2: Proces grzania dla zadanych parametrów: $T_{ot} = 24\,^{\circ}\mathrm{C}$, $T_0 = 11\,^{\circ}\mathrm{C}$, $P = 48\,\mathrm{W}$, $\kappa = 2\,\mathrm{K/W}$, $\tau = 40\,\mathrm{s}$.

a równanie (11) przybiera uproszczoną postać:

$$T(t) = T_{ot} + (T_0 - T_{ot})e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{12}$$

Przykładowy proces stygnięcia przedstawiono na rysunku 3.



Rysunek 3: Proces stygnięcia dla parametrów $P = 0\,\mathrm{W}$ oraz $T_0 = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$. Pozostałe parametry pozostawiono bez zmian w stosunku do poprzedniej symulacji.

Zakładając stałą temperaturę otoczenia $\left(\frac{\mathrm{d}T_{ot}}{\mathrm{d}t} = 0\right)$, możemy rozważać temperaturę nie w ujęciu bezwzględnym, lecz w odniesieniu właśnie do temperatury otoczenia. Wprowadzając temperaturę względną $T_\mathrm{w} = T - T_{ot}$ równanie (10) przybiera postać:

$$\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{w}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\left(T_\mathrm{w} - \kappa P\right). \tag{13}$$

1.2 Postać operatorowa procesu zmiany temperatury

Zakładając chwilowo zerowe warunki początkowe, równanie różniczkowe (10) możemy przedstawić w postaci operatorowej jako:

$$sT(s) = -\frac{1}{\tau}\left(T(s) - T_{ot} - \kappa P(s)\right). \tag{14}$$

Traktując ubytek ciepła do otoczenia jako zakłócenie, a moc jako sygnał sterujący, możemy wyrazić transmitancję operatorową procesu grzania jako:

$$G(s) = \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{\kappa}{\tau s + 1}, \tag{15}$$

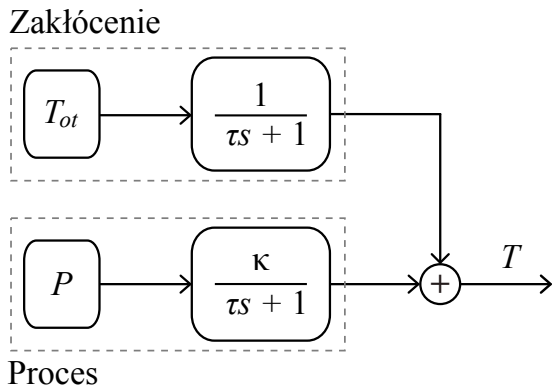
z którego widać, że $\tau\,[\mathrm{s}]$ określa stałą czasową procesu, natomiast $\kappa\,[\mathrm{K/W}]$ wyraża wzmocnienie statyczne obiektu. Ponieważ zakłócenie w postaci dyssypacji ciepła do otoczenia stanowi istotny składnik tego procesu należy uwzględnić go w rozważaniach. Wyłączając źródło zasilania ($P = 0\,\mathrm{W}$) ze wzoru (14) otrzymujemy następującą postać transmitancji zakłóceniowej:

$$G_z(s) = \frac{T(s)}{T_{ot}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}. \tag{16}$$

Rozpatrywany proces można przedstawić schematycznie w postaci zaprezentowanej na rysunku 4. Łatwo zauważyć, że w przypadku wyłączenia źródła zasilania proces będzie dążył do ustalenia wartości T na poziomie T_{ot}. Należy mieć na uwadze, że poniższy schemat nie uwzględnia początkowych warunków panujących w układzie.

Przy założeniu stałej temperatury otoczenia, transmitancja zakłóceniowa (16) nie gra żadnej roli. Należy jednak pamiętać, że zmiana temperatury otoczenia nie wpływa na temperaturę ciała w sposób natychmiastowy, lecz podlega właściwej inercji. Założenie o stałej temperaturze otoczenia pozwala na rozważanie układu w postaci (13). Równanie to można przedstawić w postaci operatorowej jako:

$$sT_\mathrm{w}(s) = -\frac{1}{\tau}\left(T_\mathrm{w}(s) - \kappa P(s)\right), \tag{17}$$

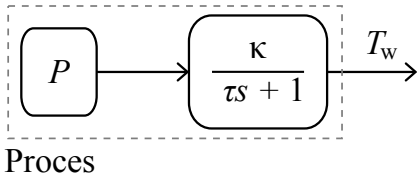


Rysunek 4: Schemat blokowy procesu grzewczego.

skąd wprost wynika transmitancja:

$$G_{\mathrm{w}}(s) = \frac{T_{\mathrm{w}}(s)}{P(s)} = \frac{\kappa}{\tau s + 1}. \tag{18}$$

Transmitancja (18) znacząco upraszcza model procesu grzewczego (rysunek 5), a zerowe warunki początkowe odpowiadają temperaturze obiektu równej temperaturze otoczenia.



Rysunek 5: Zredukowany schemat blokowy procesu grzewczego.

1.3 Sposoby pomiaru temperatury

Temperaturę układu (ciała) można mierzyć na kilka sposobów, które dzielą się na: kontaktowe (wymagające zetknięcia sensora z badanym elementem) i bezkontaktowe. Ze względu na prostotę pomiaru, zdecydowaną większość dostępnych układów pomiarowych stanowią termometry kontaktowe.

Spośród termometrów kontaktowych wyróżnić można:

- Termometry rezystancyjne, których zasada działania opiera się na sondzie pomiarowej w postaci termistora. Odpowiedni układ elektroniczny mierzy wartość rezystancji sondy i zamienia ją na użytkową wartość temperatury. Popularnym termometrem rezystancyjnym jest Pt100, który charakteryzuje opór $100\,\Omega$ dla temperatury $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ i prawie liniowa charakterystyka statyczna.

- Termometry mechaniczne, wykorzystujące liniową rozszerzalność cieplną materiałów. Sensor wykonany z bimetalu (dwóch warstw metali o różnych współczynnikach rozszerzalności cieplnej) pod wpływem zwiększonej temperatury ugina się i przemieszcza dźwignię lub wskazówkę miernika. Do termometrów mechanicznych należy także zaliczyć te, wykorzystujące zjawisko rozszerzalności objętościowej (np. termometr rtęciowy). Termometry mechaniczne znalazły szerokie zastosowanie w popularnych urządzeniach użytku codziennego jak czajnik czy żelazko. Rozszerzający się metal wyłącza zasilanie, zapobiegając tym samym przegrzaniu się urządzenia.

- Termometry działające w oparciu o tzw. termoparę, czyli dwa przewody (termoelektrody) o różnych współczynnikach termoelektrycznych, zespawane lub zlutowane na jednym końcu. Podgrzanie złączonego końca powoduje pojawienie się różnicy potencjałów elektrycznych na pozostałych końcach elektrod. Specjalny układ mierzy wartość napięcia między nimi i zamienia ją na użytkową wartość temperatury. Termopary zyskały dużą popularność ze względu na prostotę budowy oraz dużą niezawodność. W zależności od zakresu mierzonych temperatur oraz typu wykorzystanych metali dzieli się je na grupy i typy.

  Grupa I o zakresie pomiaru od $-200\,^{\circ}$C do $1250\,^{\circ}$C. Należą do niej termopary typu J, K, N, E oraz T.

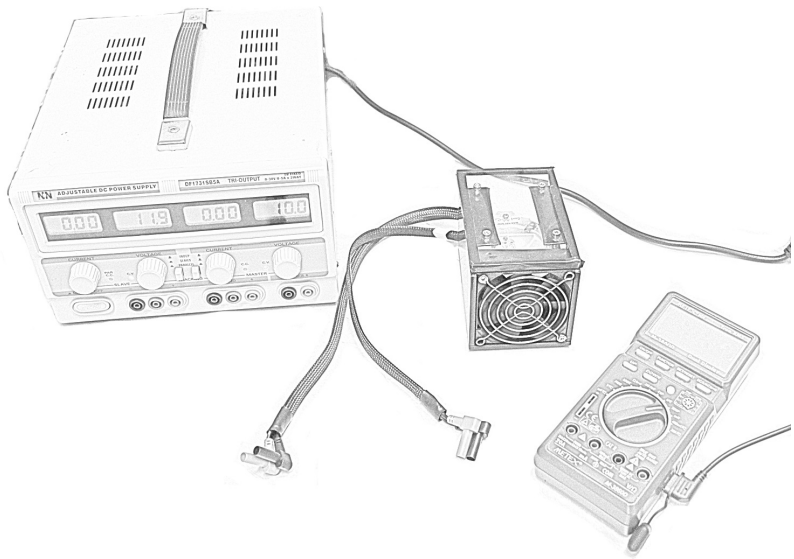
  Grupa II o zakresie pomiaru od $0\,^{\circ}$C do $1600\,^{\circ}$C. Wykonane z platyny i rodu. Należą do niej termopary typu S, R oraz B.

  Grupa III o zakresie pomiaru od $0\,^{\circ}$C do $2200\,^{\circ}$C. Wykonane z wolframu i renu. Należą do niej termopary typu C oraz D.

Czujniki bezkontaktowe wykorzystują fakt, że każde ciało o temperaturze wyższej od zera bezwzględnego ($0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,^{\circ}$C) emituje promieniowanie elektromagnetyczne. Ciała ekstremalnie zimne emitują promieniowanie z zakresu mikrofal, ciała o temperaturze zbliżonej do pokojowej emitują fale z zakresu podczerwieni, natomiast ciała rozgrzane powyżej $600\,^{\circ}$C emitują fale widzialne. Przykładem termometru bezkontaktowego jest pirometr.

2 Stanowisko laboratoryjne

Stanowisko laboratoryjne składa się z komputera stacjonarnego klasy PC z zainstalowanym programem ScopeView oraz środowiskiem Matlab, układu elektrycznego z wentylatorem oraz grzałką w postaci żarówki halogenowej, zasilacza stabilizowanego DF1731SB5A, a także multimetru cyfrowego Metex M-3860D (rysunek 6). Multimetr mierzy temperaturę z zakresu $-40\,^{\circ}$C - $1200\,^{\circ}$C za pomocą sondy z termoparą typu K. Program ScopeView komunikuje się z multimetrem za pomocą standardu RS-232.

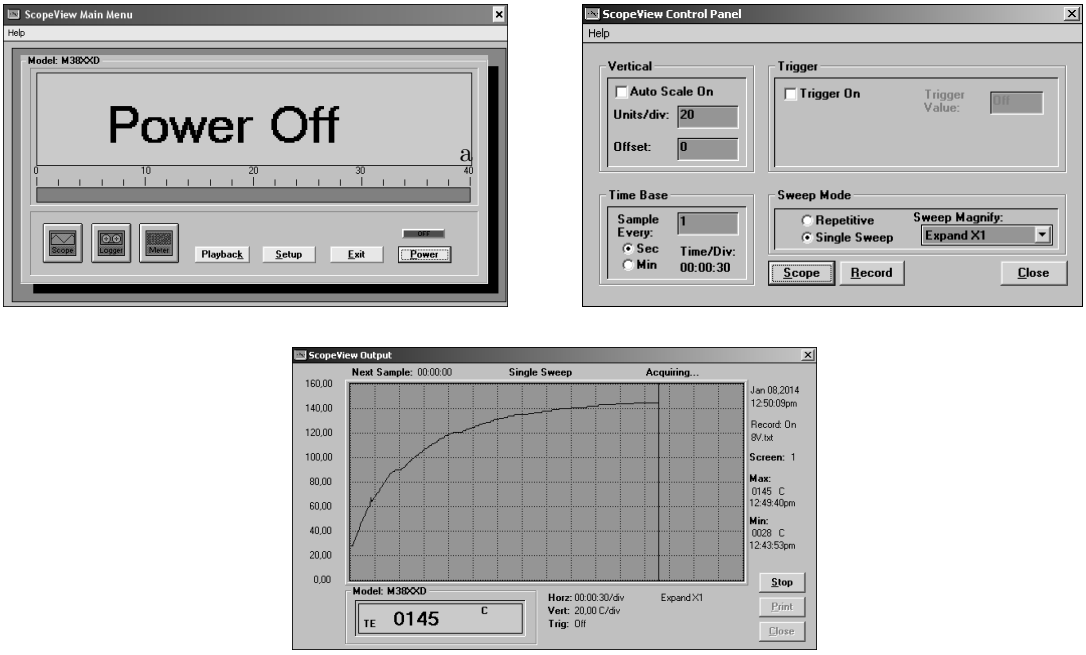


Rysunek 6: Stanowisko laboratoryjne.

W celu ustawienia odpowiedniego napięcia na wyjściu zasilacza stabilizowanego należy uruchomić go przyciskiem `POWER`, ustawić przyciski `TRACKING` w pozycji `INDEP`, a następnie pokrętłem `VOLTAGE` zadać odpowiednią wartość napięcia. Przewody należy umieścić w gniazdach po ustawieniu napięcia wyjściowego, przy czym napięciu zasilania odpowiada gniazdo +, a masie gniazdo - (nie zaś gniazdo GND). **Nie należy doprowadzić do zwarcia przewodów podłączonych do zasilacza.**

Aby dokonać pomiaru temperatury należy umiejscowić sondę pomiarową w gnieździe multimetru (polaryzacja ma znaczenie), przyłożyć końcówkę sondy do wybranego punktu, przestawić obrotowe pokrętło na pozycję `TEMP`, a następnie uruchomić multimetr. Odczytu można dokonać bezpośrednio z wyświetlacza lub z programu ScopeView.

Aby zarejestrować szereg pomiarów przy pomocy programu ScopeView (rysunek 7) należy wcisnąć przycisk `Power` w oknie głównym programu, następnie wejść w opcje przyciskiem `Scope`. W nowo otwartym oknie należy wprowadzić ustawienia pomiaru oraz nazwę pliku (przycisk `Record`), do którego zapisane zostaną pomiary, po czym wcisnąć przycisk `Scope` i `Run`.



Rysunek 7: Wybrane okna programu ScopeView.

Aby wprowadzić zebrane pomiary jako szereg liczb do środowiska Matlab, należy posłużyć się funkcją `file2temp(fileName)`. Funkcja przyjmuje nazwę pliku jako argument i zwraca w wyniku wektor o długości równej liczbie zebranych próbek. Plik z pomiarami musi znajdować się w tym samym katalogu co plik `file2temp.m`. Przykładowe wykorzystanie funkcji:

```
tempC = file2temp('pomiar1.txt').
```

3 Identyfikacja parametrów obiektu

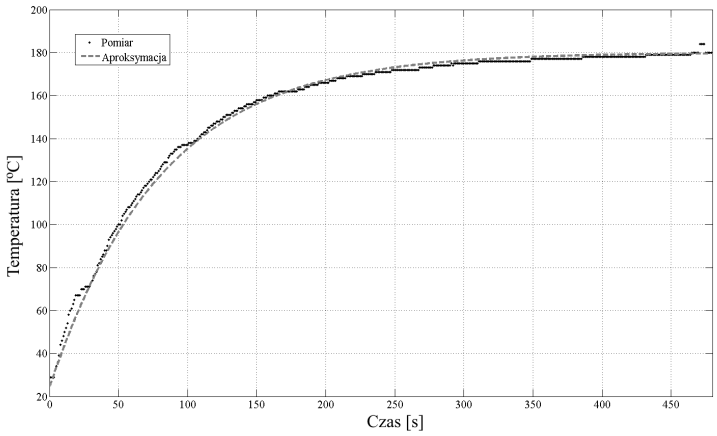
Zadanie identyfikacji procesu polega na przedstawieniu jego matematycznego modelu i oszacowaniu występujących w nim parametrów. W sekcji 1.2 przedstawiono liniowy model procesu cieplnego, w którym występują nieznane parametry κ oraz τ. Wartości tych parametrów można oszacować na podstawie wiedzy o właściwościach fizykalnych materiałów wykorzystanych w obiekcie. Gdy dane

te nie są dostępne, należy dokonać ich identyfikacji w oparciu o eksperyment. W niniejszym ćwiczeniu dla celu identyfikacji parametrów posłuży metoda polegająca na analizie przebiegu czasowego obiektu w odpowiedzi na zadane wymuszenie.

Przygotowanie eksperymentu polega na zmierzeniu wartości temperatury otoczenia, początkowej temperatury grzałki (powinna być równa temperaturze otoczenia) oraz ustaleniu mocy pobieranej przez grzałkę w czasie pracy. Przeprowadzenie eksperymentu polega na podłączeniu źródła zasilania i zebraniu pomiarów temperatury w okresie na tyle długim, aby widoczne było ustalenie się jej wartości na stałym poziomie. Wartość wzmocnienia statycznego można odczytać ze wzoru:

$$\kappa = \frac{T_{ust} - T_{ot}}{P}, \tag{19}$$

gdzie T_{ust} [K] oznacza wartość temperatury w stanie ustalonym. Jeżeli pomiar podlega znacznemu zaszumieniu, należy zastosować wstępną filtrację zebranych danych. Wartość stałej czasowej należy dobrać empirycznie, poprzez iteracyjne symulowanie eksperymentu z wprowadzanymi różnymi wartościami współczynnika τ. Wynik kolejnych symulacji należy porównywać z zebranym pomiarem na wspólnym wykresie (rysunek 8). Znana mnemotechnika pozwala z grubsza oszacować stałą czasową



Rysunek 8: Przykład aproksymacji obiektu na podstawie analizy odpowiedzi czasowej.

jako czas, po którym mierzona wartość osiąga 63,2 % wartości ustalonej:

$$T(\tau) = 0{,}632(T_{ust} - T_{ot}), \tag{20}$$

Jeżeli rozpoczęcie pomiarów zaczęło się z wyprzedzeniem w stosunku do podłączenia źródła zasilania, na zebranym wykresie może być widoczna strefa martwa, którą należy usunąć lub uwzględnić w modelu symulacyjnym poprzez wprowadzenie elementu opóźniającego na wejściu procesu. W momencie rozpoczęcia wykonywania pomiaru należy zapewnić, że grzałka jest ostudzona do temperatury bliskiej temperaturze otoczenia.

3.1 Uruchomić komputer, sprawdzić połączenie multimetru z komputerem i dokonać pomiaru temperatury otoczenia grzałki. Zarejestrować uzyskaną wartość.

3.2 Na ostudzonej grzałce zamontować sondę pomiarową i uruchomić multimetr. Uruchomić program ScopeView i podać parametry pomiaru: auto-skala: wyłączona, podziałka: 25 °C/div, offset: 0 °C, czas próbkowania: 1 s. Ustawić napięcie wyjściowe zasilacza na 12 V.

3.3 Rozpocząć rejestrację pomiaru w programie ScopeView i podłączyć zasilanie układu elektrycznego. W trakcie wykonywania pomiaru nie należy poruszać obiektem. Zaobserwować na wyświetlaczu zasilacza wartość płynącego prądu i wyznaczyć moc elektryczną grzałki. Zakończyć rejestrację pomiaru po ustaleniu się wartości temperatury (około 8 minut).

3.4 Obniżając krokowo napięcie zasilania do wartości: {11,1; 10,3; 9,4; 8,5; 7,6; 6,7; 5,6; 4,4; 2,8} V zebrać szereg pomiarów temperatury i mocy grzałki w stanie ustalonym (po każdorazowym obniżeniu napięcia odczekać 2-3 minuty).

3.5 Ostudzić grzałkę i wykonać ponowny pomiar przebiegu temperatury dla napięcia 8 V (ustawić podziałkę na 20 °C/div).

3.6 Wprowadzić uzyskane wyniki do Matlaba. Wyświetlić wyniki funkcją `plot()` i dokonać identyfikacji parametrów κ oraz τ modelu za pomocą aproksymacji obiektem inercyjnym I-go rzędu. Czy parametry obiektu uzyskane dla różnych napięć są zbliżone?

3.7 Wyświetlić charakterystykę statyczną obiektu poprzez naniesienie na jednym wykresie zależności temperatury od mocy grzałki w stanie ustalonym. Czy ma ona charakter liniowy?