

Układy Regulacji Automatycznej

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 10

REGULATORY PRZEKAŹNIKOWE.

Celem ćwiczenia jest analiza działania URA, w których rolę regulatora pełni nieliniowy element przekaźnikowy dwu- lub trójpołożeniowy. Rozważane URA z regulatorem dwu- i trójpołożeniowym badane będą poprzez bezpośrednią analizę przebiegów czasowych oraz metodą płaszczyzny fazowej.

Proces regulacji, w którym rolę regulatora odgrywa nieliniowy element przekaźnikowy nazywamy regulacją dwupołożeniową (dwustawną) lub trójpołożeniową (trójstawną), a układy regulacji z takimi regulatorami – układami regulacji dwupołożeniowej (dwustawnej) i trójpołożeniowej (trójstawnej). Techniki regulacji przekaźnikowej stosuje się w układach, w których nie jest wymagana wysoka jakość regulacji, a obiekty regulacji charakteryzują się dużymi stałymi czasowymi inercji (najczęściej są to obiekty cieplne, układy hydrauliczne oraz proste serwomechanizmy). W przekaźnikowych URA czujnik pomiarowy – często bardzo prosty w konstrukcji – może jednocześnie spełniać rolę regulatora dwu- lub trójpołożeniowego.

W działaniu regulatora dwupołożeniowego *przełączającego* – schemat pracy $(+1, -1)$ – występują dwa stany pracy:

- I. **stan dodatniego załączenia** (umownie oznaczany jako $+1$) $\Rightarrow u = u_{max} > 0$,
- II. **stan ujemnego załączenia** (umownie oznaczany jako -1) $\Rightarrow u = u_{min} < 0$.

W przypadku regulatora dwupołożeniowego *rozłączającego* – schemat pracy $(1, 0)$ – mamy następujące stany pracy:

- I. **stan załączenia** (umownie oznaczany jako 1) $\Rightarrow u = u_{max} \neq 0$,
- II. **stan rozłączenia** (umownie oznaczany jako 0) $\Rightarrow u = u_{min} \equiv 0$.

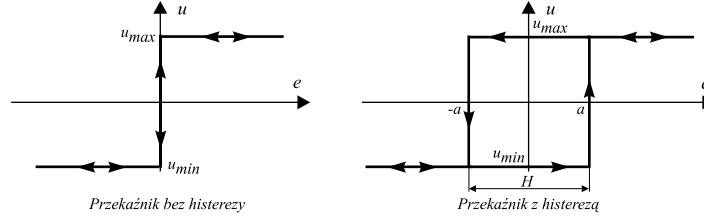
Sygnał wyjściowy regulatora dwupołożeniowego (bez histerezy) w funkcji wartości uchybu (jako sygnału wejściowego regulatora) określa jego charakterystyka statyczna (rys.1), którą można opisać następująco:

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \text{gdy } e \geq 0, \\ u_{min}, & \text{gdy } e < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Aby uniknąć nadmiernych drgań sygnału sterującego regulatora dwupołożeniowego, modyfikuje się jego pracę poprzez wprowadzenie tzw. strefy histerezy przekaźnika o szerokości H . W takim przypadku charakterystyka statyczna regulatora staje się niejednoznaczna (rys.1), a sygnał wyjściowy regulatora można opisać następująco:

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \text{gdy } (e \geq +a) \vee (|e| < a \wedge \dot{e} < 0), \\ u_{min}, & \text{gdy } (e \leq -a) \vee (|e| < a \wedge \dot{e} > 0), \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $a = \frac{H}{2}$.



Rysunek 1: Charakterystyki statyczne regulatorów dwupołożeniowych: bez histerezy (z lewej) oraz z histerezą (z prawej).

Przy analizie sygnału sterującego przydatne jest pojęcie współczynnika wypełnienia sygnału, który dla regulatora dwupołożeniowego definiuje się następująco:

$$d \triangleq \frac{t_1}{t_1 + t_{-1/0}} \triangleq \frac{t_1}{T}, \quad (3)$$

gdzie t_1 oznacza czas *dodatniego* załączenia przełącznika, a $t_{-1/0}$ czas *ujemnego* załączenia lub wyłączenia (rys. 4). Wartość średnia \bar{u} sygnału sterującego u za okres $T = t_1 + t_{-1/0}$ (zakładamy, że dla schematu pracy $(+1, -1)$ mamy: $|u_{max}| = |u_{min}| = U$, a dla schematu pracy $(1, 0)$ mamy: $u_{max} = U$) wynosi:

$$\bar{u} = U \cdot d \quad \text{dla schematu pracy } (1, 0), \quad (4)$$

$$\bar{u} = U \cdot (2d - 1) \quad \text{dla schematu pracy } (+1, -1). \quad (5)$$

Podczas pracy regulatora trójpokożeniowego możliwe są trzy stany jego pracy umożliwiające osiągnięcie trzech poziomów sygnału sterującego:

I. **stan dodatniego załączenia** (umownie oznaczany jako $+1$) $\Rightarrow u = u_{max} > 0$,

II. **stan rozłączenia** (umownie oznaczany jako 0) $\Rightarrow u = u_0 \equiv 0$,

III. **stan ujemnego załączenia** (umownie oznaczany jako -1) $\Rightarrow u = u_{min} < 0$.

W przypadku układu regulacji temperatury poszczególne stany regulatora mają swoją interpretację fizyczną: I – grzanie (stan $+1$), II – stygnięcie swobodne (stan 0), III – chłodzenie (stan -1). Dla układu serwomechanizmu przełącznikowego trzy stany regulatora reprezentują odpowiednio: I – załączenie napędu w prawo (stan $+1$), II – swobodny wybieg napędu (stan 0), III – załączenie napędu w lewo (stan -1)¹.

Podobnie jak w przypadku regulacji dwustawnej, także w przypadku regulatora trójpokożeniowego wprowadza się strefę histerezy przełącznika o szerokości H , aby uniknąć nadmiernych drgań sygnału sterującego. Dodatkowo wyróżnia się także tzw. strefę nieczułości o szerokości N związaną z zakresem stanu rozłączenia w regulatorze trójstawnym.

Postać sygnału sterującego w funkcji wartości uchybu (jako sygnału wejściowego regulatora) podaje charakterystyka statyczna regulatora trójpokożeniowego. Dla regulatora bez histerezy charakterystykę tę (rys.2) można opisać następująco:

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \text{gdy } e \geq a, \\ 0, & \text{gdy } |e| < a, \\ u_{min}, & \text{gdy } e \leq -a, \end{cases} \quad (6)$$

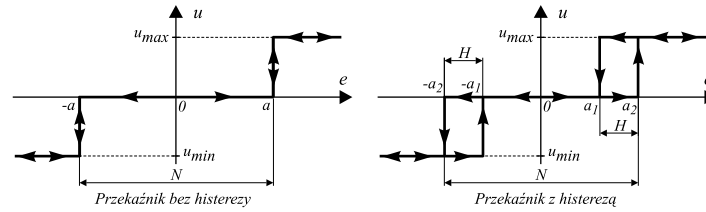
¹Analogicznie można podać fizyczną interpretację stanów regulatora dla regulacji dwupołożeniowej, jednak tylko dwa spośród wymienionych stanów będą dostępne w takim układzie.

gdzie: $a = \frac{N}{2}$.

Dla regulatora trójpółożeniowego z histerezą charakterystyka statyczna staje się niejednoznaczna i opisana jest następująco:

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \text{gdy } (e \geq a_2) \vee (a_1 < e < a_2 \wedge \dot{e} < 0), \\ 0, & \text{gdy } (|e| < a_1) \vee (a_1 < e < a_2 \wedge \dot{e} > 0) \vee (-a_2 < e < -a_1 \wedge \dot{e} < 0), \\ u_{min}, & \text{gdy } (e \leq -a_2) \vee (-a_2 < e < -a_1 \wedge \dot{e} > 0), \end{cases} \quad (7)$$

gdzie: $a_2 = \frac{N}{2}$, $a_1 = (\frac{N}{2} - H) = (a_2 - H)$.



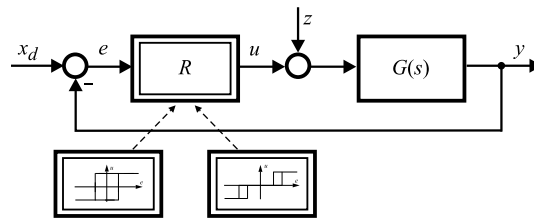
Rysunek 2: Charakterystyki statyczne regulatorów trójpółożeniowych: bez histerezy (z lewej) oraz z histerezą (z prawej).

Przy analizie sygnału sterującego przydatne jest pojęcie współczynnika wypełnienia sygnału, który dla regulatora trójpółożeniowego definiuje się następująco:

$$d \triangleq \frac{t_1}{t_1 + t_0 + t_{-1}} \triangleq \frac{t_1}{T}, \quad (8)$$

gdzie t_1 oznacza czas dodatniego załączenia przełącznika, t_0 czas rozłączenia, a t_{-1} czas ujemnego załączenia przełącznika (rys.5). Wartość średnia \bar{u} sygnału sterującego u za okres $T = t_1 + t_0 + t_{-1}$ (zakładamy, że: $|u_{max}| = |u_{min}| = U$) wynosi:

$$\bar{u} = U \cdot (2d - \frac{t_1 + t_{-1}}{T}). \quad (9)$$

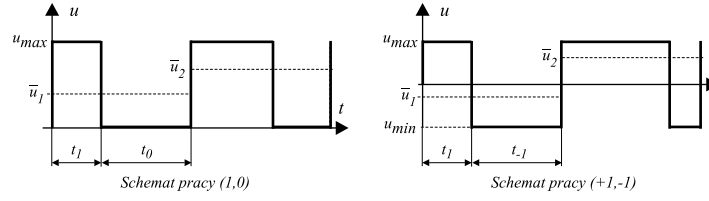


Rysunek 3: URA z nieliniowym regulatorem przełącznikowym.

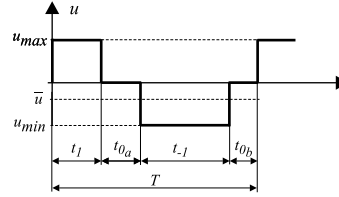
Charakterystyczną cechą działania URA z regulatorami przełącznikowymi jest doprowadzanie odpowiedzi układu do okresowych oscylacji o ustalonej amplitudzie (tzw. cykl graniczny)². W takim przypadku statyczną jakość pracy URA z regulatorami przełącznikowymi (rys. 3) ocenia się pod kątem wartości średniej uchybu po ustaleniu się w układzie stabilnego cyklu granicznego.

Analizę pracy URA można badać metodą płaszczyzny fazowej. Dla wygody analizy i prostoty

²W przypadku regulacji trójpółożeniowej cykl graniczny nie musi wystąpić, a sygnał wyjściowy może osiągnąć stabilny stan równowagi.



Rysunek 4: Przykładowe przebiegi sygnału sterującego regulatora dwustawnego dla dwóch schematów pracy: schemat (1,0) (z lewej), schemat (+1, -1) (z prawej). Zaznaczono wartości średnie \bar{u} za okres sterowania u .



Rysunek 5: Przykładowy przebieg sygnału sterującego regulatora trójstawnego (w równaniu (8) należy przyjąć $t_0 = t_{0a} + t_{0b}$). Zaznaczono wartość średnią \bar{u} za okres sterowania u .

interpretacji fizycznej można przyjąć następujące współrzędne fazowe (dla regulacji stałowartościowej):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t), \end{aligned} \quad (10)$$

lub

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e(t), \\ x_2(t) &= \dot{e}(t) = \dot{x}_1(t), \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie $y(t)$ jest sygnałem odpowiedzi układu regulacji (rys. 3), a $e(t) = x_d(t) - y(t)$ uchybem regulacji. Współrzędne te definiują płaszczyznę fazową $(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}^2$, na której analizowane będą trajektorie fazowe danego URA. W przypadku wyznaczenia kilku trajektorii fazowych na wspólnej płaszczyźnie fazowej dla różnych warunków początkowych $(x_1(0), x_2(0))$, otrzymuje się tzw. portret fazowy układu. Na rysunku 6 pokazano przykładową trajektorię fazową dla układu regulacji trójpołożeniowej z zaznaczonymi liniami przełączeń.

1 URA z regulatorem dwupołożeniowym

Rozważymy układ dwupołożeniowej regulacji temperatury obiektu cieplnego. Dynamika obiektu cieplnego została zamodelowana w postaci obiektu inercyjnego:

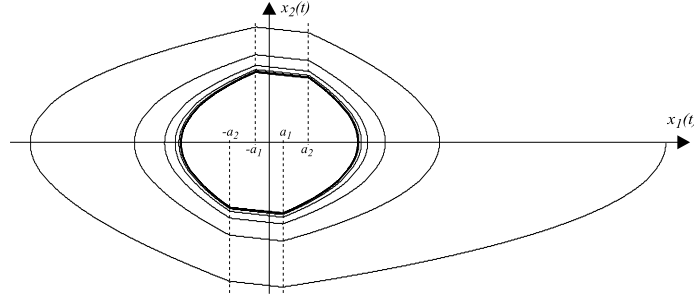
$$G(s) = \frac{K}{sT + 1} e^{-sT_0}, \quad (12)$$

gdzie T_0 oznacza czas opóźnienia reakcji obiektu na sygnał wejściowy.

Wartość średnią \bar{y} za okres sygnału odpowiedzi $y(t)$ badanego układu regulacji dwupołożeniowej określa się jako:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (13)$$

gdzie y_1 i y_2 oznaczają wartości szczytowe odpowiedzi $y(t)$ w ustalonym cyklu granicznym.



Rysunek 6: Przykładowa trajektoria fazowa układu regulacji trójpółosiowej na płaszczyźnie (e, \dot{e}) .

Wpływ wartości czasu opóźnienia T_0 w transmitancji obiektu (12) na wartość średnią \bar{y} odpowiedzi dwupółosiowego URA (pracującego w schemacie $(1, 0)$) z obiektem (12) określa zależność:

$$\frac{\bar{y}}{y_m} = \frac{x_d}{y_m} e^{-\frac{T_0}{T}} + 0.5(1 - e^{-\frac{T_0}{T}}), \quad \text{gdzie} \quad y_m = K u_{max}. \quad (14)$$

Wpływ wartości czasu opóźnienia T_0 w transmitancji obiektu regulacji na wartość międzyszczytową Δy przebiegu odpowiedzi $y(t)$ w ustalonym cyklu granicznym dla dwupółosiowego URA (pracującego w schemacie $(1, 0)$) z obiektem (12) opisuje następujące równanie:

$$\Delta y \triangleq y_2 - y_1 = y_m - (y_m - H) e^{-\frac{T_0}{T}}, \quad \text{gdzie} \quad y_m = K u_{max}, \quad (15)$$

a H jest szerokością strefy histerezy regulatora dwupółosiowego.

- 1.1 Zamodelować w środowisku SIMULINK układ regulacji z regulatorem dwupółosiowym (rys. 3) oraz obiektem (12) dla następujących wartości parametrów modelu $K = 5$, $T = 8$, $T_0 = 0$. Do konstrukcji regulatora wykorzystać blok *Relay*. Początkowo przyjąć następujące wartości parametrów regulatora: szerokość strefy histerezy $H = 1$, poziom sygnału sterującego $u_{max} = 5$, $u_{min} = 0$ (schemat pracy $(1, 0)$). Podczas analizy działania URA obserwować przebiegi czasowe sygnału wyjściowego $y(t)$, uchybu regulacji $e(t)$, sygnału sterującego $u(t)$ oraz przebieg trajektorii fazowej układu na płaszczyźnie (y, \dot{y}) . Zwrócić uwagę na dynamiczną i statyczną jakość regulacji. Na otrzymanych trajektoriach fazowych określić położenie linii przełączeń (jeżeli istnieją).

- 1.2 Przeprowadzić symulację działania URA dla skokowej wartości zadanej $x_d(t) = 20 \cdot \mathbf{1}(t)$ dla następującego zestawu szerokości strefy histerezy regulatora:

$$H = \{4, 1, 0.1\}$$

bez zmiany wartości pozostałych parametrów układu. Na podstawie odpowiedzi czasowych oraz trajektorii fazowej określić amplitudę oscylacji w uzyskanym cyklu granicznym oraz wartość średnią odpowiedzi $y(t)$.

- Jaki jest wpływ wartości szerokości strefy histerezy na jakość regulacji (wartość międzyszczytową Δy odpowiedzi URA)? Co się stanie dla $H \rightarrow 0$?
- Czy wartość średnia sygnału wyjściowego odpowiada wartości zadanej?
- Jaki charakter ma sygnał uchybu w całym horyzoncie czasowym symulacji?
- Czy możliwe jest w rozważanym URA osiągnięcie stanu ustalonego z zerowym uchybem ustalonym? Odpowiedź uzasadnić.

- 1.3 Przyjąć szerokość strefy histerezy $H = 1$. Zbadać wpływ poziomu sygnału sterującego regulatora (dla schematu pracy (1,0)):

$$u_{max} = \{20, 10, 5, 3\}$$

na pracę URA dla skokowego sygnału zadanego $x_d(t) = 20 \cdot \mathbf{1}(t)$.

- Jaki jest wpływ poziomu sygnału sterującego u_{max} na jakość regulacji i częstotliwość przełączeń regulatora?
- Czy dowolna niezerowa wartość poziomu sterowania u_{max} pozwala na realizację celu regulacji? Odpowiedź uzasadnić.

- 1.4 Przyjąć szerokość strefy histerezy $H = 1$, poziom sygnału sterującego $u_{max} = 5$. Określić wpływ stałej czasowej inercji obiektu na jakość działania URA dla

$$T = \{20, 10, 2, 0.1\}.$$

- Jaki jest wpływ stałej czasowej inercji T obiektu regulacji na amplitudę sygnału wyjściowego oraz częstotliwość przełączeń regulatora? Co się dzieje w przypadku, gdy $T \rightarrow 0$?
- Jaką rolę odgrywa zatem wartość stałej czasowej inercji obiektu w procesie regulacji przekąźnikowej?

- 1.5 Przyjąć stałą czasową inercji $T = 8$, poziom sygnału sterującego $u_{max} = 5$. Wprowadzić sygnał zakłócający w torze sterowania (rys.3) postaci $z(t) = Z \cdot \mathbf{1}(t - 5)$ dla następującego zestawu amplitud zakłócenia:

$$Z = \{6, 5, 3, -3, -5, -6\}.$$

Przyjąć zerową wartość zadaną $x_d \equiv 0$. Przeprowadzić symulację działania URA dla schematu pracy (1,0) i prześledzić zdolność układu do tłumienia wpływu poszczególnych zakłóceń.

- Jaki jest wpływ wprowadzonego zakłócenia na działanie URA? Czy układ jest w stanie tłumić wprowadzone zakłócenia? Odpowiedź uzasadnić dla każdej wartości zakłócenia.

Zmodyfikować poziom sygnału sterującego $u_{min} = -5$ – schemat pracy (+1, -1). Przeprowadzić symulację działania URA dla schematu pracy (+1, -1) dla wszystkich zadanych wartości zakłócenia.

- Czy URA tłumia wpływ wszystkich wprowadzonych zakłóceń? Jaka jest jakościowa różnica w działaniu dwupołożeniowego URA dla schematu (1,0) oraz (+1, -1)?

- 1.6** Do modelu obiektu regulacji wprowadzamy niezerowe opóźnienie T_0 (w SIMULINKU poprzez szeregowe włączenie bloku *Transport Delay* za transmitancją elementu inercyjnego). Przeprowadzić symulację działania URA w schemacie pracy (1, 0) dla następującego zestawu wartości stałej czasowej opóźnienia i szerokości strefy histerezy regulatora:

$$T_0 = \{0.5, 1, 3\}, \quad H = \{1, 0\}$$

przy skokowym sygnale zadanym $x_d(t) = 20 \cdot \mathbf{1}(t)$ i zerowym zakłóceniu. Przyjąć poziom sygnału sterującego: $u_{max} = 5$.

- W jaki sposób wartość opóźnienia T_0 obiektu wpływa na jakość regulacji (wartość międzyszczytową Δy oscylacji)? Pokazać czas T_0 na przebiegach czasowych.
- Czy dla wartości parametrów $T_0 > 0$ oraz $H = 0$ częstotliwość przełączeń regulatora zmierza do nieskończoności jak w punkcie 1.2? Dlaczego?
- Jaki jest wpływ wartości opóźnienia T_0 na wartość średnią sygnału wyjściowego i częstotliwość przełączeń regulatora?

- 1.7** Wykreślić portret fazowy URA na płaszczyźnie (y, \dot{y}) dla następujących warunków początkowych:

$$(y(0), \dot{y}(0)) = \{(-10, 0); (5, 0); (15, 0); (30, 0)\}$$

i skokowego sygnału zadanego $x_d(t) = 20 \cdot \mathbf{1}(t)$. W tym celu wykorzystać blok *Transfer-Fcn(with initial outputs)* do zamodelowania obiektu regulacji (przyjąć $T_0 = 0$) oraz blok *To Workspace* do zapisywania otrzymanych trajektorii w przestrzeni roboczej MATLABA. Portret fazowy wykreślić korzystając z funkcji *plot*. Nastawy parametrów regulatora przyjąć jak następuje: $H = 1$, $u_{max} = 5$, $u_{min} = 0$.

- Jaki jest wpływ warunków początkowych na trajektorie fazowe układu i osiąganie cyklu granicznego? Jaka jest interpretacja fizyczna otrzymanych trajektorii fazowych?

2 URA z regulatorem trójpółożeniowym

Układ regulacji z regulatorem trójpółożeniowym rozważymy na przykładzie serwomechanizmu przekładnikowego. Napęd z silnikiem wykonawczym został zamodelowany transmitancją postaci³:

$$G(s) = \frac{K_v}{s(sT + 1)}, \quad (16)$$

która wiąże pozycję wału napędu z sygnałem wejściowym w postaci momentu napędowego.

- 2.1** W środowisku SIMULINK zamodelować układ regulacji trójpółożeniowej (rys. 3) z obiektem (16) dla następujących wartości parametrów transmitancji: $K_v = 3, T = 5$. Do konstrukcji regulatora trójpółożeniowego wykorzystać dwa bloki *Relay* połączone równolegle. Początkowo przyjąć następujące wartości parametrów regulatora: szerokość strefy nieczułości regulatora $N = 2$, szerokość strefy histerezy $H = 0$, poziomy sygnał sterującego $u_{max} = 5$, $u_0 = 0$, $u_{min} = -5$. Podczas analizy działania URA obserwować przebiegi czasowe sygnału wyjściowego $y(t)$, uchybu regulacji $e(t)$, sygnału sterującego $u(t)$ oraz przebieg trajektorii fazowej układu na płaszczyźnie (e, \dot{e}) . Zwrócić uwagę na dynamiczną i statyczną jakość regulacji. Na otrzymanych trajektoriach fazowych określić położenie linii przełączeń (jeżeli istnieją).

³W modelu pominięto całkowicie część elektromagnetyczną silnika.

- 2.2** Zasyмуляwać działanie URA w odpowiedzi na skokowy sygnał zadany $x_d(t) = 15 \cdot \mathbf{1}(t)$ dla następujących wartości szerokości strefy nieczułości regulatora

$$N = \{0.2, 1, 2, 4\}.$$

- Jaki jest wpływ wartości szerokości strefy nieczułości na jakość regulacji?
- Czy w badanym URA występuje ustalony cykl graniczny dla dowolnej wartości szerokości strefy nieczułości N przy $H = 0$?
- Jaki jest wpływ wartości N na wartość uchybu ustalonego?
- Jaka będzie odpowiedź URA dla $N \rightarrow 0$ oraz $H = 0$? Odpowiedź omówić.

- 2.3** Przyjąć wartość szerokości strefy nieczułości $N = 5$. Przeprowadzić symulacje działania URA w odpowiedzi na skokowy sygnał zadany $x_d(t) = 15 \cdot \mathbf{1}(t)$ dla następujących wartości szerokości strefy histerezy:

$$H = \{0, 0.1, 0.5, 1\}.$$

Z otrzymanych trajektorii fazowych na płaszczyźnie (e, \dot{e}) określić strefę nieczułości N oraz szerokość strefy histerezy H regulatora.

- Jaki jest wpływ szerokości strefy histerezy H na jakość regulacji?
- Czy dla wszystkich wartości H otrzymuje się ustalony cykl graniczny w odpowiedzi URA?
- W jaki sposób ujawnia się występowanie histerezy na trajektorii fazowej układu?

- 2.4** Przyjąć następujące wartości parametrów regulatora: $N = 3$, $H = 0.1$. Przeprowadzić symulacje działania URA w odpowiedzi na skokowy sygnał zadany $x_d(t) = 15 \cdot \mathbf{1}(t)$ dla następującego zestawu poziomów sygnału sterującego regulatora:

$$u_{max} = -u_{min} = \{1, 2, 5, 10, 15\}.$$

- Jaki wpływ ma wartość poziomu sygnału sterującego regulatora na jakość pracy URA i częstotliwość przełączeń regulatora?
- Czy dla wszystkich wartości poziomów sygnału sterującego odpowiedź URA wpada w cykl graniczny?

- 2.5** Wykreślić portret fazowy URA na płaszczyźnie (e, \dot{e}) dla następujących warunków początkowych:

$$(y(0), \dot{y}(0)) = \{(-5, 0); (10, 0); (30, 0); (40, 0)\}$$

i skokowego sygnału zadanego $x_d(t) = 15 \cdot \mathbf{1}(t)$. W tym celu wykorzystać blok *Transfer-Fcn(with initial outputs)* do zamodelowania obiektu regulacji oraz blok *To Workspace* do zapisywania otrzymanych trajektorii w przestrzeni roboczej MATLABA. Portret fazowy wykreślić korzystając z funkcji *plot*. Nastawy parametrów regulatora przyjąć jak następuje: $N = 5$, $H = 1$, $u_{max} = 5$, $u_{min} = -5$.

- Jaki jest wpływ warunków początkowych na trajektorie fazowe układu i osiągnięcie cyklu granicznego?
- Jaka jest interpretacja fizyczna otrzymanych trajektorii fazowych?

□