

Układy Regulacji Automatycznej

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 12

NIELINIOWE CIĄGŁE UKŁADY REGULACJI

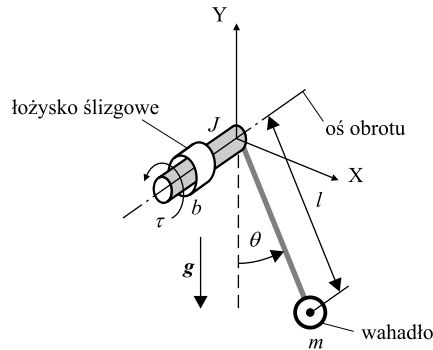
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z wybranymi metodami projektowania i analizy stabilności stosowanymi w nieliniowych ciągłych URA. W ćwiczeniu przewidziano projektowanie URA z wykorzystaniem pierwszej i drugiej metody Lapunowa oraz z zastosowaniem linearyzacji dynamicznej.

1 Model obiektu sterowania

Przyjmijmy, że dynamikę obiektu sterowania (rys. 1) opisuje następujące nieliniowe równanie różniczkowe:

$$(J + ml^2) \ddot{\theta} + (B_1 |\dot{\theta}| + B_2) \dot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau, \quad (1)$$

gdzie θ oznacza sygnał wyjściowy rozumiany jako kąt nachylenia nieważkiego ramienia o długości $l = 1[m]$, na końcu którego znajduje się kula o masie $m = 9[kg]$, τ jest wejściowym momentem siły, $J = 1[kg \cdot m^2]$ oznacza moment bezwładności układu napędowego, $g = 10[m/s^2]$ jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego, $B_1 = 0.05[Nm \cdot s^2/rad^2]$ i $B_2 = 0.1[Nm \cdot s/rad]$ określają współczynniki modelu tarcia.



Rysunek 1: Nieliniowy obiekt regulacji.

W celu uogólnienia rozważań równanie modelu obiektu zapisujemy w postaci następującej

$$f(\mathbf{x}, u) = a_2(\mathbf{x}) \ddot{x} + a_1(\mathbf{x}) \dot{x} + a_0(\mathbf{x}) - b_0(\mathbf{x}, u) = 0 \quad (2)$$

gdzie $x = \theta$ jest sygnałem wyjściowym obiektu, $u = \tau$ określa sygnał sterujący (wejściowy), $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \ddot{\theta}]^T$ jest wektorem opisującym sygnał wyjściowy i jego pochodne,

natomiast współczynniki a_0, a_1, a_2 oraz b_0 są równe odpowiednio

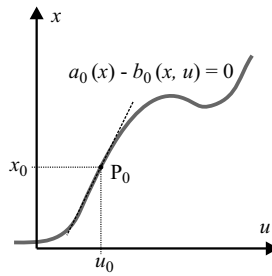
$$a_2(\mathbf{x}) = J + ml^2 = \text{const}, \quad a_1(\mathbf{x}) = B_1 |\dot{x}| + B_2, \quad a_0(\mathbf{x}) = mgl \sin x, \quad b_0(\mathbf{x}, u) = \tau. \quad (3)$$

2 Linearyzacja statyczna

Rozważmy nieliniowe równanie różniczkowe (2) w stanie równowagi w punkcie $P_0 = (x_0, u_0)$, zwanym punktem pracy (rys. 2). Warunek równowagi określamy analitycznie podstawiając w równaniu (2) $\dot{x} = 0$ oraz $\ddot{x} = 0$ i otrzymujemy

$$a_0(\mathbf{x}_0) - b_0(\mathbf{x}_0, u_0) = 0, \quad (4)$$

przy czym $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ 0 \ 0]^T$.



Rysunek 2: Przykładowa charakterystyka statyczna układu nieliniowego.

W celu linearyzacji równania (2) w pewnym otoczeniu punktu równowagi P_0 (tj. dla $|x - x_0| < \varepsilon_1$ oraz $|u - u_0| < \varepsilon_2$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$) funkcję $f(\mathbf{x}, u)$ rozwijamy w szereg potęgowy (szereg Taylora) i zanedbujemy składniki nieliniowe otrzymując następujące liniowe równanie różniczkowe

$$\underbrace{\bar{a}_2 \Delta \ddot{x} + \bar{a}_1 \Delta \dot{x} + \bar{a}_0 \Delta x}_{\text{zlinearyzowana dynamika procesu}} + \underbrace{\bar{b}_0 \Delta u + a_0(\mathbf{x}_0) - b_0(\mathbf{x}_0, u_0)}_{\text{charakterystyka statyczna}} = 0, \quad (5)$$

gdzie

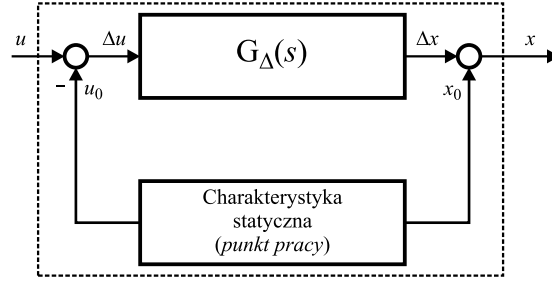
$$\Delta \mathbf{x} = [x - x_0 \quad \dot{x} - \dot{x}_0 \quad \ddot{x} - \ddot{x}_0]^T = [\Delta x \quad \Delta \dot{x} \quad \Delta \ddot{x}]^T = [x - x_0 \quad \dot{x} \quad \ddot{x}]^T, \quad (6)$$

$$\Delta u = u - u_0, \quad (7)$$

przy czym

$$\bar{a}_2 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \ddot{x}} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad \bar{a}_1 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial \dot{x}} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad \bar{a}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad \bar{b}_0 = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}. \quad (8)$$

Z równania (5) można uzyskać transmitancję przyrostową $G_\Delta(s) = \Delta X(s)/\Delta U(s)$ opisującą liniową dynamikę procesu w otoczeniu punktu pracy. Zasada linearyzacji statycznej zilustrowana została na rys. 3, na którym wyróżniono część odpowiadającą za model dynamiki procesu oraz część modelującą jego charakterystykę statyczną.

Rysunek 3: Schemat zlinearyzowanego modelu obiektu (2) w punkcie pracy P_0 .

2.1 Analiza stabilności i jakość aproksymacji I metodą Lapunowa

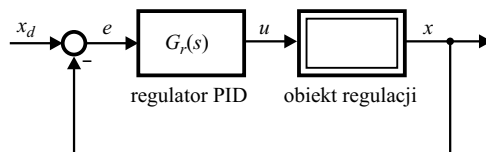
- 2.1 Wyznaczyć analitycznie aproksymację liniową równania różniczkowego (1) i zapisać ją w postaci podanej zależnością (5). W tym celu obliczyć wartości współczynników \bar{a}_2 , \bar{a}_1 , \bar{a}_0 oraz \bar{b}_0 (patrz zależności (8)) w trzech punktach pracy $P_0 = (x_0, u_0)$ przyjmując wartości x_0 ze zbioru $x_0 \in \{0, 1, 2\}$. Wartość statyczną sygnału sterującego u_0 dla przyjętych wartości x_0 wyznaczyć z równania (4). Wykreślić charakterystykę statyczną obiektu (1).
- 2.2 Na podstawie poprzedniego punktu zapisać transmitancję operatorowe układu zlinearyzowanego (tj. określić zależność $G_\Delta(s) = \Delta X(s) / \Delta U(s)$) w trzech wymienionych poprzednio punktach pracy.
 - Które punkty są punktami równowagi stabilnej, a które niestabilnej? Odpowiedź wyjaśnić w oparciu o kształt charakterystyki statycznej obiektu oryginalnego (1).
- 2.3 W środowisku SIMULINK zbudować nieliniowy model obiektu opisany równaniem (1) oraz jego postać zlinearyzowaną wyznaczoną w punkcie 2.1 (wykorzystać schemat blokowy podany na rys. 3). Następnie porównać odpowiedzi obiektu (1) oraz (5) w otoczeniu punktu pracy $P_0 = (x_0, u_0)$ (gdzie $x_0 \in \{0, 1, 2\}$ oraz u_0 spełnia równanie (4)) na wymuszenie $u(t) = u_0 + \varepsilon_u \cdot 1(t - 1)$. Dla każdego założonego punktu równowagi należy przyjąć odpowiednie parametry modelu obiektu zlinearyzowanego (na podstawie punktu 2.1). Uwaga: na początku procesu symulacji zakładamy, że oba układy znajdują się w równowadze (tj. dla $u = u_0$, $x = x_0$) – dlatego ważne jest prawidłowe zadanie wartości $x = x_0$, $u = u_0$ jak również wyzerowanie pochodnych $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$. Badanie przeprowadzić dla $\varepsilon_u = 0.1$ oraz $\varepsilon_u = 1$.
 - Czy odpowiedzi układów (1) oraz (5) są jednakowe? Dla której wartości ε_u uzyskuje się lepszą aproksymację układu nieliniowego układem liniowym? Dlaczego? Wnioski poprzec analizą przebiegu różnicy odpowiedzi obu badanych układów w funkcji czasu.
 - Czy odpowiedzi układów (1) oraz (5) pozwalają wyciągnąć jednakowe wnioski dotyczące stabilności tych układów w otoczeniu badanych punktów pracy? Jaki jest zakres stosowalności linearyzacji statycznej?

2.2 Projektowanie URA z wykorzystaniem I metody Lapunowa

Rozważmy układ regulacji stałowartościowej (rys. 4) z obiektem nieliniowym opisanym zależnością (1). Przyjmujemy, że regulator jest rzeczywistym regulatorem liniowym PID o transmitancji

$$G_r(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T s + 1} \right) \quad (9)$$

oraz zakładamy, że $T_d/T = 10$. Nastawy k_p , T_d oraz T_i zostały dobrane na podstawie optymalizacji numerycznej uchybu regulacji URA z obiektem zlinearyzowanym (5) w otoczeniu punktu pracy



Rysunek 4: Układ regulacji z obiektem nieliniowym i liniowym regulatorem PID.

$P_0 = (x_0, u_0)$ i wymuszeniu skokowym. Jako kryterium jakości przyjęto następujący funkcjonal

$$J(t_h) = \int_0^{t_h} (|e(t)| + |\dot{e}(t)|) dt, \quad (10)$$

gdzie $t_h = 15[s]$ jest horyzontem symulacji. Optymalne nastawy regulatora PID w wybranych punktach pracy zestawione zostały w tabeli 1.

x_0	k_p	$T_i[s]$	$T_d[s]$
0	21	0.17	1.5
1	21	0.29	1.4
2	281	1.3	0.42

Tablica 1: Optymalne parametry regulatora PID według kryterium (10) w wybranych punktach pracy uzyskane dla obiektu zlinearyzowanego.

2.4 W środowisku SIMULINK zbudować (na jednym schemacie) modele URA z obiektem nieliniowym oraz obiektem zlinearyzowanym w otoczeniu punktu pracy (wykorzystać modele z punktu 2.3) i regulatorami PID o transmitancji podanej zależnością (9).

2.5 Analizę jakości pracy URA przeprowadzić dla następujących punktów równowagi $x_0 = \{0, 1, 2\}$ (przyjąć odpowiadający danemu punktowi pracy model układu zlinearyzowanego określony w punkcie 2.1; zapewnić odpowiednie warunki początkowe $x(0) = x_0$, $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) \equiv 0$, $u_I(0) = u_0$, gdzie u_I oznacza sterowanie bloku całkującego regulatora PID). Parametry regulatorów PID ustawić według danych przedstawionych w tabeli 1. Na wejścia obu układów regulacji podawać sygnał skokowy $x_d(t) = x_0 + \epsilon \cdot \mathbf{1}(t)$ dla $\epsilon = \{0.1, 1\}$. Porównać odpowiedzi URA z obiektem nieliniowym i zlinearyzowanym.

- Czy oba układy regulacji są stabilne w badanym otoczeniu punktu x_0 ?
- Czy przebiegi sygnału wyjściowego obu URA są podobne dla $\epsilon = 0.1$ i $\epsilon = 1$? O czym to świadczy?

2.6 Przeanalizować pracę URA ponownie dla punktu pracy $x_0 = 0$ (zmodyfikować parametry układu zlinearyzowanego na podstawie punktu 2.1). Na wejście URA z oryginalnym obiektem nieliniowym podawać sygnały skokowe $x_d(t) = x_0 + \epsilon \cdot \mathbf{1}(t)$ dla $\epsilon = \{0.1, 1, 2\}$. Dla każdej wartości ϵ przyjmować kolejno nastawy regulatora PID takie, jak dla punktu $x_0 = 2$ oraz jak dla punktu $x_0 = 0$ (wg tablicy 1).

- Czy URA jest stabilny dla wszystkich wartości ϵ i jednocześnie dowolnych nastaw regulatora? O czym to świadczy?
- Jaki jest zakres stosowalności linearyzacji statycznej oraz I metody Lapunowa? Czy jest to metoda globalna?
- Czy projektowanie regulatora w oparciu o zlinearyzowany model obiektu w ogólnym przypadku gwarantuje uzyskanie stabilnej pracy URA z układem nieliniowym?

3 Linearyzacja dynamiczna

Ograniczenia linearyzacji statycznej w otoczeniu punktu równowagi pokonuje inna metoda zwana linearyzacją dynamiczną. Dla pewnej klasy procesów nieliniowych pozwala ona na tzw. linearyzację globalną, polegającą na przekształceniu nieliniowego równania różniczkowego do postaci liniowego równania różniczkowego w całej dziedzinie sterowań i zmiennych charakteryzujących stan obiektu. Należy zauważyć, że w ogólności problem linearyzacji dynamicznej układów wielowymiarowych jest problemem trudnym i wymaga znajomości elementów geometrii różniczkowej¹.

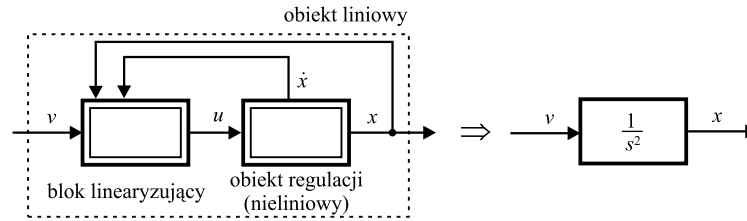
W ćwiczeniu nasze rozważania ograniczymy do przypadku prostej linearyzacji dynamicznej zastosowanej dla obiektu nieliniowego SISO opisanego równaniem (2). W tym celu równanie (2) przekształcamy do postaci

$$\ddot{x} = \frac{-a_1(\mathbf{x})\dot{x} - a_0(\mathbf{x}) + b_0(\mathbf{x}, u)}{a_2(\mathbf{x})} \quad (11)$$

a następnie wykorzystując zależności (3) zapisujemy prostszą postać modelu obiektu

$$\ddot{x} = \frac{-a_1(\mathbf{x})\dot{x} - a_0(\mathbf{x}) + u}{a_2(\mathbf{x})}, \quad (12)$$

przy czym $\forall_{t \geq 0} a_2 > 0$. W celu eliminacji składników nieliniowych proponujemy następującą postać



Rysunek 5: Zasada linearyzacji dynamicznej zastosowana do obiektu (2).

sygnału wejściowego

$$u(t) = a_1(\mathbf{x})\dot{x} + a_0(\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{x})v(t), \quad (13)$$

gdzie $v(t)$ jest nowym sygnałem wejściowym. Następnie podstawiając (13) do (2) otrzymujemy

$$\ddot{x}(t) = v(t), \quad (14)$$

co oznacza, że w wyniku zdefiniowania sygnału wejściowego $u(t)$ jak w (13) uzyskujemy liniowy model obiektu sterowania będący odpowiednikiem podwójnego integratora o transmitancji $G(s) = X(s)/V(s) = 1/s^2$ (porównaj rys. 5). Zauważmy, że nowym (pomocniczym) sygnałem sterowania jest w tym przypadku sygnał $v(t)$ (nie $u(t)$).

3.1 Projektowanie sterowania z wykorzystaniem linearyzacji dynamicznej

Zaprojektujmy teraz układ regulacji przedstawiony na rys. 6. W tym celu zdefiniujmy uchyb regulacji jako

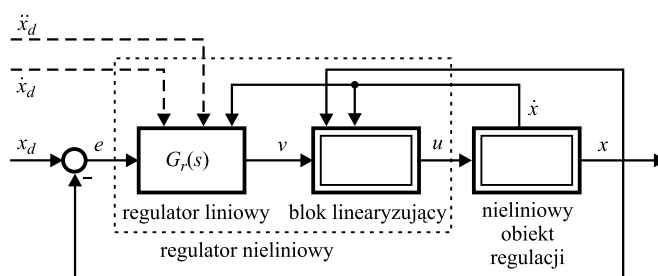
$$e(t) = x_d(t) - x(t), \quad (15)$$

gdzie $x_d(t)$ jest sygnałem zadany. Po dwukrotnym różniczkowaniu równania (15) po czasie (zakładamy, że funkcja $x_d(t)$ jest co najmniej dwukrotnie różniczkowalna²) możemy zapisać

$$\ddot{x}(t) = -\ddot{e}(t) + \ddot{x}_d(t). \quad (16)$$

¹Wprowadzenie do linearyzacji dynamicznej można znaleźć m.in. w książce: M.W. Spong, M. Vidyasagar „Dynamika i sterowanie robotów”.

²W zadaniu regulacji stałowartościowej przyjmujemy $\dot{x}_d(t) = \ddot{x}_d(t) \equiv 0$ aby pominąć problem nieciągłości funkcji skokowej.



Rysunek 6: URA wykorzystujący technikę linearyzacji dynamicznej.

Podstawiając (16) do (14) mamy

$$-\ddot{e}(t) + \ddot{x}_d(t) = v(t). \quad (17)$$

W następnym kroku projektujemy prawo sterowania $v(t)$ przyjmując, że

$$v(t) = \ddot{x}_d(t) + k_d \dot{e}(t) + k_p e(t), \quad (18)$$

gdzie $k_p, k_d > 0$ określają nastawy idealnego regulatora PD o transmitancji

$$G_r(s) = k_p + k_d s = k_p(1 + T_d s), \quad (19)$$

przy czym $T_d = k_d/k_p$ określa stałą czasową wyprzedzenia. Po podstawieniu (18) do (17) otrzymujemy następujące jednorodne liniowe równanie różniczkowe

$$\ddot{e}(t) + k_d \dot{e}(t) + k_p e(t) = 0, \quad (20)$$

które jest podstawą doboru parametrów k_p i k_d regulatora tak, aby uzyskać asymptotyczną stabilność URA (tj. $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$) oraz zapewnić żądany przejściowy charakter sygnału uchybu $e(t)$. W celu syntezy regulatora (18) w oparciu o postać równania (20) rozważa się następujące równanie charakterystyczne

$$s^2 + k_d s + k_p = 0, \quad (21)$$

gdzie $s \in \mathbb{C}$ jest zmienną zespoloną.

- 3.1** Pokazać analitycznie, że dla obiektu (2) w wyniku zastosowania sterowania zgodnie z regułą (13) uzyskuje się model obiektu liniowego (14).
- 3.2** Na podstawie równania charakterystycznego (21) zaprojektować nastawy regulatora k_p oraz k_d aby zapewnić krytycznie tłumiony charakter zaniku uchybu regulacji $e(t)$. Wskazówka: przyjąć arbitralnie wartość k_p i wyznaczyć wzmocnienie k_d .
 - *Z czego wynika równanie charakterystyczne (21)?*
 - *Jaki jest warunek uzyskania nieoscylacyjnego przebiegu uchybu $e(t)$?*
- 3.3** W środowisku SIMULINK zbudować URA (rys. 6) z nieliniowym modelem obiektu opisanego równaniem (1) (na podstawie punktu 2.1), zamodelować blok linearyzujący opisany zależnością (13) oraz regulator o równaniu (18).
- 3.4** Podać na wejście URA sygnał zadany $x_d = \mathbf{1}(t)$ a następnie $x_d = 2 \cdot \mathbf{1}(t)$. Przyjąć $\ddot{x}_d(t) = \dot{x}_d(t) = 0$. Zaobserwować przebieg uchybu regulacji $e(t)$.
 - *Czy zbieżność sygnału $e(t)$ jest zgodna z oczekiwaniami? Czy zależy ona od wartości wymuszenia x_d ?*
 - *Czy rozważana linearyzacja ma charakter lokalny czy globalny?*

3.5 Podać na wejście URA sygnał sinusoidalny $x_d = 10 \sin(t)$ (w celu eliminacji różniczkowania numerycznego sygnały $\ddot{x}_d(t)$ oraz $\dot{x}_d(t)$ obliczyć analitycznie).

- Czy zbieżność sygnału $e(t)$ jest analogiczna jak w punkcie 3.4?
- Jakie zadania regulacji rozwiązuje badany URA?

4 Badanie stabilności II metodą Lapunowa.

Druga metoda Lapunowa (zwana też bezpośrednią metodą Lapunowa) należy do fundamentalnych w teorii sterowania i służy do analizy stabilności układów dynamicznych. Opiera się ona na zdefiniowaniu funkcji skalarnej $V(\mathbf{x})$ zależnej od stanu \mathbf{x} rozważanego układu o następujących własnościach:

- W1. $V(\mathbf{x})$ musi być dodatnia w pewnym obszarze S i przyjmować wartość zero tylko w początku układu współrzędnych (tj. $V(\mathbf{0}) = 0$ oraz $V(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \in S$);
- W2. $V(\mathbf{x})$ obliczana wzdłuż trajektorii musi maleć (lub co najmniej pozostawać stała) w miarę jak \mathbf{x} posuwa się wzdłuż trajektorii – oznacza to, że pochodna tej funkcji po czasie musi być co najmniej ujemnie półokreślona w obszarze S ($\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ dla $\mathbf{x} \in S$).

Jeśli taka funkcja istnieje to mówimy, że układ jest stabilny w obszarze S . Stabilność asymptotyczna w obszarze S wymaga aby pochodna funkcji Lapunowa była ujemnie określona, tzn. $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ dla $\mathbf{x} \in S$.

W przypadku, gdy obszar S pokrywa całą przestrzeń stanu, to wówczas mówimy o stabilności globalnej, w przeciwnym przypadku możemy orzekać tylko o stabilności lokalnej w badanym obszarze S .

Należy podkreślić, że teoria funkcji Lapunowa jest bardzo ogólna, w związku z czym znalezienie jej szczególnej postaci dla rozważanego układu może być zadaniem trudnym i niejednoznacznym (tzn. może istnieć wiele różnych postaci funkcji Lapunowa, które pozwalają wyciągnąć wniosek o stabilności URA).

4.1 Projektowanie URA z wykorzystaniem II metody Lapunowa

Rozważmy dwa projekty regulatora (prawa sterowania) dla obiektu (1), które zostały wyprowadzone w oparciu o dwie różne postaci funkcji Lapunowa.

4.1.1 Projekt A

Niech dodatnio określona funkcja skalarna (tzw. kandydatka funkcji Lapunowa) V_1 ma postać następującą

$$V_1(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} \ln [1 + e^2(t)] + \frac{1}{2} \lambda \ln [1 + \dot{e}^2(t)], \quad (22)$$

gdzie $\lambda > 0$, $e(t)$ oraz $\dot{e}(t)$ określają uchyb regulacji (15) oraz jego pochodną. Obliczając pierwszą pochodną funkcji $V_1(e, \dot{e})$ po czasie możemy zapisać, że

$$\dot{V}_1(e, \dot{e}) = \frac{\dot{e}e}{1 + e^2} + \lambda \frac{\ddot{e}\dot{e}}{1 + \dot{e}^2}. \quad (23)$$

Zgodnie z teorią Lapunowa w celu uzyskania stabilności asymptotycznej postulujemy, aby

$$\dot{V}_1(e, \dot{e}) < 0. \quad (24)$$

co pozwala zapisać następującą nierówność

$$\frac{\dot{e}e}{1 + e^2} + \lambda \frac{\ddot{e}\dot{e}}{1 + \dot{e}^2} = \dot{e} \left(\frac{e}{1 + e^2} + \lambda \frac{\ddot{e}}{1 + \dot{e}^2} \right) < 0. \quad (25)$$

Nierówność (25) jest spełniona jeżeli

$$\frac{e}{1+e^2} + \lambda \frac{\ddot{e}}{1+\dot{e}^2} = -k\dot{e}, \quad (26)$$

gdzie $k > 0$. Przekształcając zależność (26) otrzymujemy

$$\ddot{e} = \frac{1+\dot{e}^2}{\lambda} \left(-k\dot{e} - \frac{e}{1+e^2} \right). \quad (27)$$

Następnie podstawiając do (27) zależności (12) oraz (15) możemy zapisać następujące równanie, z którego wyznaczymy sygnał sterujący $u(t)$

$$\ddot{x}_d - \frac{-a_1\dot{x} - a_0(\mathbf{x}) + u}{a_2} = \frac{1+\dot{e}^2}{\lambda} \left(-k\dot{e} - \frac{e}{1+e^2} \right). \quad (28)$$

Na podstawie zależności (28) otrzymujemy następujące prawo sterowania

$$u = \left[k \frac{a_2(1+\dot{e}^2)}{\lambda} - a_1(\mathbf{x}) \right] \dot{e} + \frac{a_2(\mathbf{x})(1+\dot{e}^2)}{\lambda(1+e^2)} e + a_0(\mathbf{x}) + a_2(\mathbf{x}) \ddot{x}_d + a_1(\mathbf{x}) \dot{x}_d. \quad (29)$$

Zauważmy, że parametry λ oraz k są parametrami projektowymi regulatora.

Kontynuując nasze rozważania sprawdzimy jaką postać ma pochodna funkcji Lapunowa $\dot{V}_1(e, \dot{e})$ po zastosowaniu sterowania zgodnie z regułą (29) do obiektu (1). Otrzymamy wówczas

$$\dot{V}_1(e, \dot{e}) = -k\dot{e}^2, \quad (30)$$

co determinuje $\dot{V}_1 < 0$ dla $\forall \dot{e} \neq 0$. Dla $\dot{e} = 0$ mamy $\dot{V}_1 = 0$, niezależnie od wartości uchybu $e(t)$. Potencjalnie taki przypadek może oznaczać brak stabilności asymptotycznej (tj. $\lim_{t \rightarrow \infty} V_1 = C$, gdzie $C \neq 0$ oznacza ograniczoną stałą). Aby sprawdzić, czy w tym przypadku zaprojektowane prawo sterowania (29) gwarantuje stabilność asymptotyczną musimy orzec, czy jest możliwy przypadek, dla którego $e \neq 0$ oznacza punkt równowagi systemu nieliniowego (tj. $e^{(n)} = 0$ dla $n = 1, 2, \dots$)³.

W tym celu podstawmy sygnał $u(t)$ zdefiniowany zależnością (29) do równania modelu (1) co pozwala otrzymać następujące równanie różniczkowe

$$\ddot{e} + \frac{k}{\lambda} (1+\dot{e}^2) \dot{e} + \frac{1}{\lambda} \frac{1+\dot{e}^2}{1+e^2} e = 0. \quad (31)$$

Z równania (31) wynika wprost, że dla $e(t) \neq 0$ nie istnieje punkt równowagi – dlatego jedynym punktem równowagi jest punkt, dla którego $e = 0$.

Na tej podstawie orzekamy, że zaprojektowane prawo sterowania zapewnia uzyskanie stabilności asymptotycznej.

4.1.2 Projekt B

W drugim przykładzie założymy, że funkcja skalarna V_2 jest zależna od uchybu regulacji i jego pochodnej w sposób następujący

$$V_2(e, \dot{e}) = \frac{1}{2} (\lambda \dot{e} + e)^2. \quad (32)$$

Obliczając pochodną funkcji $V_2(e, \dot{e})$ po czasie mamy

$$\dot{V}_2(e, \dot{e}) = (\lambda \dot{e} + e)(\lambda \ddot{e} + \dot{e}). \quad (33)$$

³O takim przypadku orzeka twierdzenie La Salle'a (systemy autonomiczne) oraz La Salle'a–Yoshizawy (systemy nieautonomiczne).

Następnie postępując analogicznie jak w podrozdziale 4.1.1 wyznaczamy prawo sterowania zapewniające asymptotyczną zbieżność uchybu regulacji

$$u = \left[a_2(x) \left(k + \frac{1}{\lambda} \right) - a_1(x) \right] \dot{e} + a_2(x) \frac{k}{\lambda} e + a_0(x) + a_2(x) \ddot{x}_d + a_1(x) \dot{x}_d, \quad (34)$$

gdzie podobnie jak dla regulatora opisanego równaniem (29) współczynniki λ oraz k są parametrami projektowymi.

Wyznaczając pochodną funkcji Lapunowa \dot{V}_2 otrzymujemy

$$\dot{V}_2(e, \dot{e}) = -k(\lambda \dot{e} + e)^2, \quad (35)$$

z czego wnioskujemy, że $\forall e, \dot{e} \neq 0 \quad \dot{V}_2(e, \dot{e}) < 0$. Co więcej, w oparciu o postać funkcji (32) oraz postać powyższej pochodnej wyrażenie $\lambda \dot{e} + e$ zmierza do zera dla $t \rightarrow \infty$. Zatem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda \dot{e} + e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}, e = 0. \quad (36)$$

4.1 W środowisku SIMULINK zbudować dwa URA z obiektem nieliniowym (1) oraz regulatorami realizującymi nieliniowe prawo sterowania (29) oraz (34).

4.2 Wskazać w prawach sterowania (29) oraz (34) składniki realizujące sprzężenie zwrotne oraz sprzężenie w przód.

- Jak można interpretować funkcję Lapunowa opisaną zależnością (32)?

4.3 Sprawdzić odpowiedź obu URA na sygnały skokowe $x_d(t) = 0.1 \cdot \mathbf{1}(t)$, $x_d(t) = \mathbf{1}(t)$, $x_d(t) = 2 \cdot \mathbf{1}(t)$ oraz $x_d(t) = 10 \cdot \mathbf{1}(t)$. Uwaga: założyć $\ddot{x}_d(t) = \dot{x}_d(t) \equiv 0$. Parametry regulatorów przyjąć równe: $k = 1$, $\lambda = 0.5$. Porównać przebiegi sygnału wyjściowego dla obu układów regulacji i różnych wartości sygnałów zadanych. Obliczyć wskaźniki całkowite uchybu zdefiniowane przez funkcjonal

$$J = \int_0^{t_h} |e(t)| dt \quad (37)$$

dla obu URA dla badanych sygnałów zadanych przyjmując $t_h = 30[s]$.

- Czy oba URA są asymptotycznie stabilne niezależnie od wartości sygnału zadanego? Czy stabilność URA ma charakter lokalny czy globalny?
- Czy charakter odpowiedzi badanych URA zależy od wartości sygnału zadanego? Jak skalują się wartości funkcjonału J dla obu URA w zależności od wartości sygnału zadanego?
- Który URA zapewnia bardziej oczekiwany przebieg uchybu regulacji? Odpowiedź uzasadnić w oparciu o postać analityczną funkcji Lapunowa V_1 oraz V_2 .

4.4 Sprawdzić odpowiedź obu URA dla zadania odtwarzania sygnału sinusoidalnego i sygnału narastającego kwadratowo. W tym celu na wejścia obu URA podać sygnały zadane równe odpowiednio $x_d(t) = 10 \sin(2t) + 2$ oraz $x_d(t) = t^2 + 2$ (Uwaga: nie stosować różniczkowania numerycznego – w SIMULNIKU zamodelować generator sygnału zadanego, a pochodne $\dot{x}_d(t)$, $\ddot{x}_d(t)$ wyznaczyć analitycznie). Parametry k i λ przyjąć jak w punkcie poprzednim.

- Czy oba URA są asymptotycznie stabilne niezależnie dla badanych wymuszeń?

4.5 Zbadać wpływ parametrów regulatorów k oraz λ na przebiegi przejściowe uchybu dla rozważanych URA. Badania prowadzić dla regulacji stałowartościowej dla $x_d = \mathbf{1}(t)$. Początkowo przyjąć $k = 1$ oraz $\lambda \in \{0.1, 0.5, 1, 5\}$. Obserwować przebieg uchybu $e(t)$ i określić wpływ parametru λ na przebieg uchybu regulacji dla obu URA. Wykorzystać wskaźnik jakości (37). Następnie przyjmując $\lambda = 0.5$ przeprowadzić symulacje odpowiedzi skokowej dla $k \in \{0.1, 1, 10\}$. Porównać przebiegi uchybu regulacji w zależności od wzmocnienia k . Na wykresach czasowych przedstawić ewolucję funkcji skalarnych $V_1(t)$ oraz $V_2(t)$.

- *Jaki wpływ na oscylacyjność uchybu ma wartość parametru λ ? Jak można go interpretować?*
- *Jaki wpływ na czas regulacji ma wartość parametru k ?*
- *Jaki przebieg czasowy mają funkcje $V_1(t)$ oraz $V_2(t)$? Wykreślić pochodne obu funkcji po czasie i skomentować ich przebieg.*

□