Układy Regulacji Automatycznej

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 1

Częstotliwościowe kryterium stabilności Nyquist'a.

Celem ćwiczenia jest analiza stabilności układów liniowych w oparciu o częstotliwościowe kryterium Nyquist'a. Ponadto ćwiczenie ma zapoznać z pojęciem zapasów stabilności (modułu i fazy) oraz ich określaniem na podstawie charakterystyk amplitudowo-fazowych (Nyquist'a) oraz logarytmicznych modułu i fazy (wykresy Bode'go).

1 Kryterium stabilności Nyquist'a

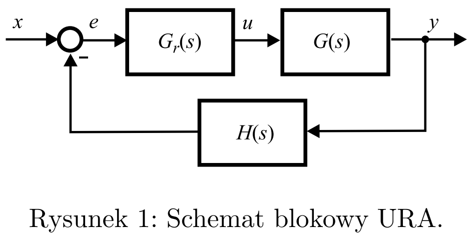
Kryterium Nyquist'a pozwala określić stabilność układu zamkniętego (z ujemnym sprzężeniem zwrotnym – rys. 1) na podstawie charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego zazwyczaj można wyznaczyć eksperymentalnie, dlatego metoda Nyquist'a ma duże znaczenie praktyczne. Kryterium Nyquist'a brzmi następująco:

Twierdzenie 1 (Kryterium Nyquist'a) *Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie to układ zamknięty jest również stabilny asymptotycznie, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa* $G_o(j\omega)$ *układu otwartego przy zmianie pulsacji* ω *od* 0 *do* $+\infty$ *nie obejmuje punktu* $(-1, j0)$ *(rys. 2).*

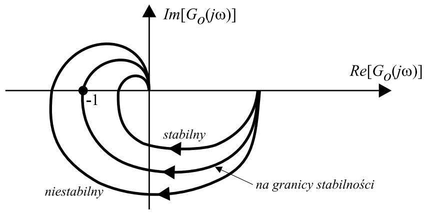
Jeżeli układ otwarty jest niestabilny i jego transmitancja $G_o(s)$ *ma* l *biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej* s*, to układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji* ω *od* 0 *do* $+\infty$ *obejmuje punkt* $(-1, j0)$ $l/2$ *razy.*

Stabilność układu zamkniętego dogodnie jest sprawdzać na podstawie liczby przecięć charakterystyki $G_o(j\omega)$ z osią rzeczywistą z lewej strony punktu $(-1, j0)$, gdzie dodatnimi nazywamy przejścia $G_o(j\omega)$ *z góry na dół* (kąt przesunięcia ϕ wzrasta), a ujemnymi *z dołu do góry.* Ponadto przyjmuje się także, że jeżeli krzywa $G_o(j\omega)$ wychodzi przy $\omega = 0$ z punktu położonego z lewej strony punktu $(-1, j0)$ to w miejscu tym występuje połowa przecięcia $G_o(j\omega)$ z osią rzeczywistą. Wówczas kryterium Nyquist'a można sformułować w sposób alternatywny:

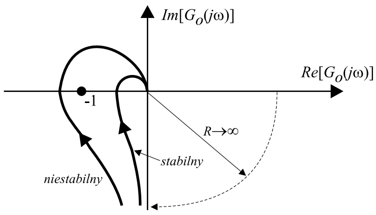
Twierdzenie 2 (Alternatywne kryterium Nyquist'a) *Jeżeli układ otwarty jest stabilny asymptotycznie to układ zamknięty jest również stabilny asymptotycznie, wtedy i tylko wtedy, gdy różnica*



Rysunek 1: Schemat blokowy URA.



Rysunek 2: Kryterium Nyquist'a w przypadku układów otwartych stabilnych.



Rysunek 3: Kryterium Nyquist'a w przypadku układów otwartych na granicy stabilności.

liczby przecięć dodatnich i ujemnych charaktrystyki $G_o(j\omega)$ z cześcią osi rzeczywistej z lewej strony punktu $(-1, j0)$ jest równa 0 przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$.

Jeżeli układ otwarty jest niestabilny i jego transmitancja $G_o(s)$ ma l biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, to układ zamknięty będzie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczby przecięć dodatnich i ujemnych charaktrystyki $G_o(j\omega)$ z cześcią osi rzeczywistej z lewej strony punktu $(-1, j0)$ jest równa $l/2$ przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$.

W przypadku układów otwartych na granicy stabilności[1] należy poprowadzić półokrąg o promieniu $R \to \infty$ wychodząc z dodatniej części osi rzeczywistej do początku charakterystyki aplitudowo-fazowej układu otwartego (rys. 3).

1.1 W środowisku MATLAB zamodelować przedstawione poniżej transmitancje. Wykreślić charakterystyki amplitudowo-fazowe toru otwartego URA z rys. 1 (wykorzystać polecenie *ltiview*), gdzie poszczególne transmitancje $G_r(s)$, $G(s)$, $H(s)$ przedstawiono poniżej (przyjąć $k = 1$):

a) $G_r(s) = k,\quad G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2},\quad H(s) = 1,$

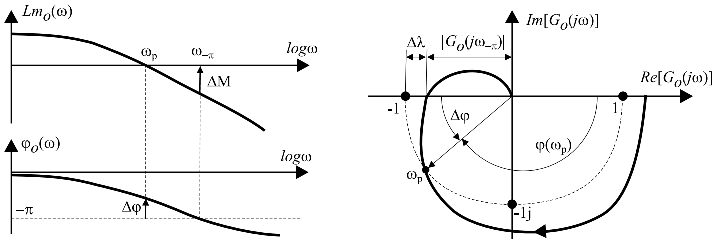
b) $G_r(s) = k,\quad G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s},\quad H(s) = \dfrac{1}{s + 0.5},$

c) $G_r(s) = k,\quad G(s) = \dfrac{10}{s^2 + 2.5s + 1},\quad H(s) = \dfrac{1}{s + 1},$

d) $G_r(s) = k\,(1 + 3s)\,,\quad G(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 1},\quad H(s) = 1,$

e) $G_r(s) = k,\quad G(s) = \dfrac{10s^2 + s + 1}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s},\quad H(s) = \dfrac{1}{s}.$

[1] Czyli układów z pojedynczym biegunem zerowym.



Rysunek 4: Określanie zapasów stabilności na charakterystykach Bode'go i Nyquist'a

- *Czy układ otwarty dla każdego z powyższych zestawów transmitancji jest stabilny (wykonać potrzebne obliczenia)?*

Na podstawie otrzymanych charakterystyk amplitudowo-fazowych układów otwartych określić stabilność układu zamkniętego korzystając z kryterium Nyquist'a.

- *Czy któryś z przedstawionych zestawów obiektów a) - e) gwarantuje strukturalną stabilność zamkniętego URA (odpowiedź uzasadnić)?*

1.2 Dla każdego zestawu obiektów z punktu 1.1 zasymulować odpowiedź skokową zamkniętego URA (rys. 1).

- *Czy uzyskane wyniki potwierdzają wnioski dotyczące stabilności wyciągnięte w oparciu kryterium Nyquist'a?*

1.3 Zbadać wpływ wartości wzmocnienia k transmitancji regulatora na stabilność zamkniętego URA w każdym z zestawów obiektów a) - e) z punktu 1.1.

- *Czy zwiększenie wzmocnienia układu otwartego zmniejsza czy zwiększa stabilność układu zamkniętego?*

2 Zapasy stabilności

Zapasy stabilności stanowią miarę *oddalenia* układu zamkniętego od granicy stabilności. Odpowiednie zapasy stabilności określa się następująco:

Definicja 1 (Zapas wzmocnienia modułu) *Zapas wzmocnienia modułu*[2] *λ jest to krotność o którą można zwiększyć wzmocnienie układu otwartego (bez zmiany przesunięcia fazowego), aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności:*

$$\lambda = \frac{1}{|G_o(j\omega_{-\pi})|} \quad \Rightarrow \quad M = 20 \log \lambda \, [dB].$$

Definicja 2 (Zapas fazy) *Zapas fazy $\Delta\phi$ jest to wartość przesunięcia fazowego, które można dodatkowo wprowadzić w układzie otwartym (bez zmiany wzmocnienia), aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności:*

$$\Delta\phi = \phi(\omega_p) + \pi.$$

Sposób określania zapasów stabilności na charakterystykach Nyquist'a oraz Bode'go został pokazany na rys. 4.

[2] Uwaga: zapasu wzmocnienia modułu λ nie należy mylić z zapasem modułu $\Delta\lambda$, który definiuje się jako $\Delta\lambda = 1 - |G_o(j\omega_{-\pi})|$.

2.1 Wyznaczyć charakterystyki Bode'go i Nyquist'a toru otwartego URA z rys. 1 dla wszystkich zestawów transmitancji a) - e) podanych w punkcie 1.1 i przeanalizować występujące zapasy stabilności.

- *Jaki jest wpływ wartości wzmocnienia k na zapasy stabilności (wykreślić stosowne charakterystyki w funkcji wartości wzmocnienia k przyjmując $k = \{0.5,\ 2,\ 5\}$)?*
- *Czy zmiana wartości zapasów stabilności wpływa na charakter stanów przejściowych w odpowiedzi skokowej zamkniętego URA (wykonać stosowne symulacje)?*

2.2 Dana jest transmitancja toru otwartego pewnego URA $G_o = \frac{k}{(2s+1)^3}$. Wyznaczyć analitycznie wartość wzmocnienia k, tak aby zapas wzmocnienia modułu wynosił 6dB.

- *Ile wynosi zapas fazy dla podanej transmitancji i wyliczonego wzmocnienia k?*

Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe Bode'go i Nyquist'a transmitancji G_o dla wyliczonej wartości wzmocnienia k.

- *Czy uzyskane wyniki (uzyskane zapasy stabilności) są zgodne z wykonanymi obliczeniami analitycznymi?*

□