

# Układy Regulacji Automatycznej

Politechnika Poznańska  
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

## ĆWICZENIE 8 ÷ 9

LINIOWE UKŁADY IMPULSOWE.

Celem ćwiczenia jest analiza procesu próbkowania i odtwarzania sygnałów ciągłych oraz ocena różnych metod dyskretyzacji ciągłych modeli układów dynamicznych. W trakcie ćwiczenia zbadany zostanie także wpływ szybkości próbkowania oraz efektu kwantyzacji sygnału sterującego na jakość działania i stabilność układów regulacji automatycznej z regulatorem cyfrowym.

### 1 Próbkowanie i ekstrapolacja

Proces próbkowania sygnału ciągłego  $x(t)$  w dziedzinie czasu<sup>1</sup> polega na pomiarze wartości tego sygnału w dyskretnych chwilach czasu równo oddalonych od siebie o okres  $T_p$  (zwany okresem próbkowania). Zbiór tych wartości można przedstawić jako ciąg impulsów  $x(kT_p)$  o amplitudzie równej wartości sygnału ciągłego w danej  $k$ -tej próbce. Próbkowanie sygnału wymagane jest w impulsowych układach regulacji, gdzie ciągłym obiektem steruje regulator cyfrowy (impulsowy). Wartości próbek podlegają przetwarzaniu wewnątrz regulatora (zgodnie z algorytmem regulacji), a wynik przetwarzania stanowi wartość sterowania  $u(kT_p)$ , które (po zamianie na sygnał analogowy *uciąglony*) należy w chwili  $k$ -tej podać na wejście obiektu regulacji.

Aby *uciąglić* pewien sygnał dyskretny<sup>2</sup>  $x(kT_p)$  stosuje się elementy zwane ekstrapolatorami. Generalnie ekstrapolator gwarantuje obecność sygnału ciągłego pomiędzy poszczególnymi próbkami sygnału dyskretnego, przy czym jego charakter zależy od typu zastosowanego ekstrapolatora w postaci generatora przebiegu wielomianowego  $n$ -tego rzędu:

$$\hat{x}(kT_p + \tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_n\tau^n, \quad \tau \in [0, T_p),$$

który podczas generowania sygnału wykorzystuje  $n+1$  poprzednich wartości próbek sygnału dyskretnego  $x(kT_p)$ . W praktyce stosuje się ekstrapolatory rzędu zerowego *Zero Order Hold* (ewentualnie rzędu pierwszego *First Order Hold*) podtrzymujące przez cały okres próbkowania  $T_p$  stałą wartość sygnału odpowiadającą wartości próbki z chwili  $k$ -tej:

$$\hat{x}(kT_p + \tau) = a_0 = x(kT_p), \quad \tau \in [0, T_p)$$

dając na wyjściu sygnał *schodkowy* (czyli odcinkami stały). Transmitancja operatorowa ekstrapolatora rzędu zerowego w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$  wynosi:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT_p}}{s}. \quad (1)$$

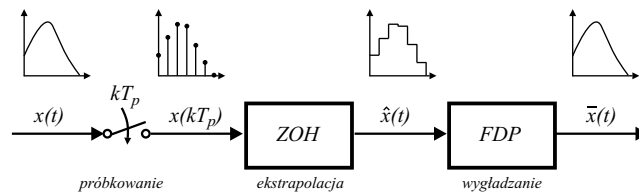
<sup>1</sup>Pomijamy tutaj tymczasowo problem próbkowania w poziomie zwany kwantyzacją sygnału i wszystkie skutki tego procesu.

<sup>2</sup>Termin *uciąglić* oznacza w tym przypadku określenie wartości sygnału także pomiędzy poszczególnymi chwilami próbkowania – nie należy tego terminu zatem utożsamiać z ciągłością sygnału w sensie matematycznym (!).

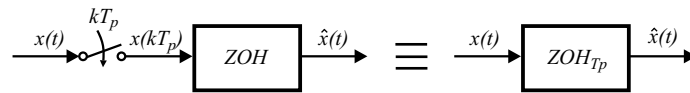
Natomiast transmitancja operatorowa ekstrapolatora pierwszego rzędu to:

$$G_{foh}(s) = \left( \frac{1 - e^{-sT_p}}{s} \right)^2 \frac{1 + sT_p}{T_p}. \quad (2)$$

Gdyby istniała potrzeba odtworzenia oryginalnego sygnału ciągłego  $x(t)$  z sygnału dyskretnego  $x(kT_p)$ , to poza spełnieniem twierdzenia o próbkowaniu (patrz dalej) szeregowo za ekstrapolatorem należałoby umieścić idealny filtr dolnoprzepustowy (FDP), który z widma sygnału schodkowego  $\hat{x}(t)$  (na wyjściu ekstrapolatora zerowego rzędu) odfiltruje wszystkie niepożądane wyższe harmoniczne (rys. 1).



Rysunek 1: Schemat blokowy ilustrujący procesy: próbkowania, ekstrapolacji (*uciągłania*) i wygładzania (w celu odtworzenia pierwotnego sygnału ciągłego  $x(t)$ ).



Rysunek 2: Ekstrapolator (tu: zerowego rzędu) stosowany w środowisku SIMULINK jako szeregowe połączenie idealnego impulsatora i ekstrapolatora.

**Twierdzenie 1 (Shannona-Kotelnikowa)** Aby sygnał ciągły  $x(t)$  można było odtworzyć z sygnału spróbkowanego  $x(kT_p)$ , częstotliwość próbkowania  $f_p = 1/T_p$  musi być co najmniej dwa razy większa od maksymalnej częstotliwości  $f_g$  składowej harmonicznej w widmie sygnału ciągłego.

Jeżeli powyższe twierdzenie nie będzie spełnione, to podczas procesu próbkowania wystąpi zjawisko *aliasingu nieodwracalnego* skutkującego zafałszowaniem i utratą informacji o oryginalnym sygnale ciągłym  $x(t)$  (sygnał odtworzony  $\bar{x}(t)$  nie będzie odzwierciedlał sygnału oryginalnego).

- 1.1** Korzystając ze środowiska SIMULINK przeprowadzić symulacje próbkowania i ekstrapolacji ciągłego sygnału sinusoidalnego  $x(t) = \sin(2\pi 0.1t)$  dla dwóch rodzajów ekstrapolatorów<sup>a</sup>: zerowego rzędu (blok *Zero Order Hold*) oraz pierwszego rzędu (blok *First Order Hold*) dla następujących wartości okresu próbkowania:

$$T_p = \{7.5[s], 5[s], 2.5[s], 2[s], 1[s], 0.5[s], 0.1[s], 0.01[s]\}.$$

- Jaka jest zasada ekstrapolacji dla obu typów ekstrapolatorów?
- Która z metod ekstrapolacji jest bardziej precyzyjna? Czy odpowiedź na to pytanie jest zależna od wartości okresu próbkowania  $T_p$ ?
- Jaki jest wpływ wartości okresu próbkowania  $T_p$  na dokładność aproksymacji sygnału ciągłego przez sygnał schodkowy? Które wartości okresu  $T_p$  spełniają twierdzenie Shannona-Kotelnikowa?

<sup>a</sup>W środowisku SIMULINK każdy ekstrapolator zawiera wbudowany impulsator pobierający próbki sygnału wejściowego w stałych odstępach czasowych równych  $T_p$  – rys. 2.

- 1.2 Za ekstrapolatorem zerowego rzędu (z poprzedniego punktu) dołączyć szeregowo ciągły wygładzający filtr dolnoprzepustowy o transmitancji (rys. 3):

$$G_{FDP}(s) = \frac{0.643}{(s + 0.5)^2} \quad (3)$$

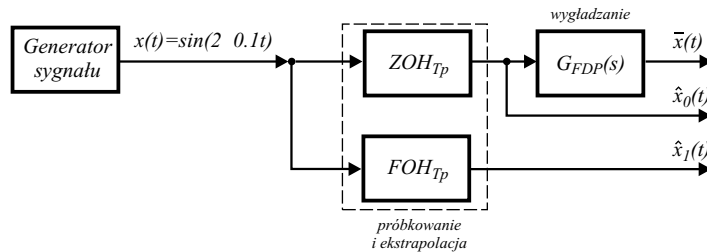
w celu odtworzenia sygnału oryginalnego  $x(t)$  na wyjściu toru przetwarzania<sup>a</sup>. Przeprowadzić symulacje próbkowania, ekstrapolacji i wygładzania (poprzez filtrację dolnoprzepustową) sygnału  $x(t) = \sin(2\pi 0.1t)$  dla następujących wartości okresu próbkowania (rys. 3):

$$T_p = \{7.5[s], 5[s], 2.5[s], 2[s], 1[s], 0.5[s], 0.1[s]\}.$$

Porównać sygnały  $\bar{x}(t)$ ,  $\hat{x}_0(t)$  oraz  $\hat{x}_1(t)$  (rys. 3).

- Czy wartość okresu próbkowania  $T_p$  ma wpływ na jakość odtwarzania sygnału oryginalnego (co do kształtu, amplitudy i częstotliwości)?
- Czy dla pewnych wartości okresu próbkowania  $T_p$  występuje zjawisko aliasingu (jeśli tak określić dla jakich)? W jaki sposób się ono objawia?
- Czy spełnienie twierdzenia o próbkowaniu dla dyskretyzowanego sygnału  $x(t)$  zawsze gwarantuje wierne odtworzenie sygnału oryginalnego w układzie: impulsator–ekstrapolator–filtr(3)? Odpowiedź uzasadnić (wskazówka: wziąć pod uwagę charakterystykę częstotliwościową modułu filtru (3)).
- Czy w układach regulacji mamy do czynienia z koniecznością odtwarzania sygnałów zdyskretyzowanych?

<sup>a</sup>Wzmocnienie statyczne filtru dobrano tak, aby zapewnić jednostkowe wzmocnienie amplitudy sygnału wejściowego przy częstotliwości  $f = 0.1[Hz]$ .



Rysunek 3: Schemat blokowy toru przetwarzania sygnału ciągłego z punktu 1.2.

## 2 Transformacje częstotliwościowe

W układach regulacji impulsowej posługujemy się dyskretnymi modelami obiektów dynamicznych w postaci transmitancji  $G(z)$ . Transmitancje te można utworzyć bezpośrednio z równania różnicowego ułożonego dla danego systemu lub też z istniejącej już transmitancji operatorowej  $G(s)$  (utworzonej na bazie równania różniczkowego systemu ciągłego). Ten drugi sposób wymaga zastosowania transformacji częstotliwościowej odwzorowującej płaszczyznę zmiennej zespolonej  $s$  w płaszczyznę zmiennej zespolonej  $z$ . Istnieje kilka takich transformacji o różnych własnościach, które w ogólności dają różne wyniki zamiany transmitancji  $G(s)$  w  $G(z)$ . Poniżej przedstawiono pięć transformacji rozważanych w ćwiczeniu:

- A. **transformacja z ekstrapolacją zerowego rzędu (*zoh*)** – nazywana też transformacją **skokowo-inwariantną** – wynika z obliczenia transformaty  $\mathcal{Z}$  szeregowego połączenia danej

transmitancji  $G(s)$  oraz transmitancji ekstrapolatora zerowego rzędu (wzór (1)):

$$G(z) \stackrel{zoh}{=} \mathcal{D}\{F(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{D}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}, \quad F(s) = \frac{1 - e^{-sT_p}}{s} G(s),$$

- B. **transformacja z ekstrapolacją pierwszego rzędu** (*foh*) – wynika z obliczenia transformaty  $\mathcal{Z}$  z szeregowego połączenia danej transmitancji  $G(s)$  oraz transmitancji ekstrapolatora pierwszego rzędu (wzór (2)):

$$G(z) \stackrel{foh}{=} \mathcal{D}\{F(s)\} = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{D}\left\{\frac{1 + sT_p}{T_p s^2} G(s)\right\}, \quad F(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT_p}}{s}\right)^2 \frac{1 + sT_p}{T_p} G(s),$$

- C. **transformacja impulsowo-inwariantna** (*imp*) – wynika z obliczenia transformaty  $\mathcal{Z}$  zdyskretyzowanego sygnału odpowiedzi impulsowej  $g(t)$  obiektu opisanego transmitancją  $G(s)$  :

$$G(z) \stackrel{imp}{=} \mathcal{D}\{F(s)\}, \quad F(s) = G(s),$$

- D. **transformacja Tustina** (*tust*) – ma źródło w metodzie całkowania poprzez sumowanie pól trapezów (dobrze przybliża elementy całkujące):

$$G(z) \stackrel{tust}{=} G(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T_p} \frac{z-1}{z+1}},$$

- E. **transformacja Eulera backward** (*eulB*) – ma źródło w aproksymacji równania różniczkowego systemu ciągłego równaniem różnicowym z różnicą definiowaną *w tył*:  $\Delta f = f(k) - f(k-1)$  (odpowiada też metodzie całkowania poprzez sumowanie pól prostokątów):

$$G(z) \stackrel{eulB}{=} G(s) \bigg|_{s = \frac{z-1}{zT_p}},$$

- F. **transformacja Eulera forward** (*eulF*) – ma źródło w aproksymacji równania różniczkowego systemu ciągłego równaniem różnicowym z różnicą definiowaną *w przód*:  $\Delta f = f(k+1) - f(k)$  (odpowiada też metodzie całkowania poprzez sumowanie pól prostokątów):

$$G(z) \stackrel{eulF}{=} G(s) \bigg|_{s = \frac{z-1}{T_p}},$$

gdzie w powyższych definicjach:

$$\mathcal{D}\{F(s)\} = \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\right]_{t=kT_p}.$$

Pierwsze trzy transformacje A-C przekształcają bieguny  $s_i$  transmitancji  $G(s)$  w bieguny  $z_i$  transmitancji  $G(z)$  zgodnie z następującą relacją:

$$z_i = e^{s_i T_p}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Transformacje D-E natomiast przekształcają bieguny  $s_i$  transmitancji  $G(s)$  w bieguny  $z_i$  transmitancji  $G(z)$  zgodnie z następującymi relacjami:

$$\text{metoda D (tust):} \quad z = \frac{1 + \frac{T_p}{2}s}{1 - \frac{T_p}{2}s}, \quad (5)$$

$$\text{metoda E (eulB):} \quad z = \frac{1}{1 - T_p s}, \quad (6)$$

$$\text{metoda F (eulF):} \quad z = 1 + T_p s. \quad (7)$$

Transformacje A-C stosujemy w przypadku dyskretyzacji transmitancji obiektów regulacji (lub innych podsystemów ciągłych, na wejściu których występuje ekstrapolator). Przekształcenia D-F natomiast znajdują zastosowanie do realizacji regulatorów oraz filtrów (korektorów) cyfrowych. Najlepszą dokładność aproksymacji całkowania uzyskuje się w tym przypadku stosując transformację biliniową (Tustin'a) – definicja D, która odwzorowuje całą lewą półpłaszczyznę zmiennej zespolonej  $s$  we wnętrze okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $z$  (dzięki temu daje najlepsze wyniki dyskretnej aproksymacji w dziedzinie częstotliwości).

Rozważmy ciągły liniowy obiekt dynamiczny opisany następującą transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{1}{3s^2 + s + 1}. \quad (8)$$

Poniżej przeprowadzona zostanie analiza i porównanie różnych metod aproksymacji tej transmitancji modelem dyskretnym w postaci transmitancji  $G(z)$ .

- 2.1** W przestrzeni roboczej MATLAB-a zamodelować ciągły obiekt dynamiczny opisany równaniem (8). Obliczyć dyskretną transmitancję operatorową  $G(z)$  przybliżającą obiekt (8) dla podanych wartości okresu próbkowania:

$$T_p = \{2[s], 1[s], 0.5[s], 0.1[s]\}$$

stosując następujące transformacje częstotliwościowe:

- (a) transformacja z ekstrapolacją zerowego rzędu (*zoh*):  $G(z) = \text{c2d}(G, T_p, 'zoh')$ ,
- (b) transformacja z ekstrapolacją pierwszego rzędu (*foh*):  $G(z) = \text{c2d}(G, T_p, 'foh')$ ,
- (c) transformacja impulsowo-inwariantna (*imp*):  $G(z) = \text{c2d}(G, T_p, 'imp')$ ,
- (d) transformacja Tustina (biliniowa) (*tust*):  $G(z) = \text{c2d}(G, T_p, 'tustin')$ ,
- (e) transformacja Eulera (*eulB*): realizacja analityczna obliczeniowa (podstawienie do (8) formuły  $s = \frac{1}{T_p} \frac{z-1}{z}$  i zamodelowanie wynikowej transmitancji  $G(z)$ ).

Porównać postaci uzyskanych transmitancji dyskretnych oraz rozmieszczenie biegunów i zer tych transmitancji (wykorzystać wzory (4)-(7) do sprawdzenia wyników).

- Czy wszystkie transformacje częstotliwościowe są sobie równoważne i dają te same transmitancje dyskretne?
- Czy wybór metody dyskretyzacji i wartości okresu próbkowania ma wpływ na położenie biegunów i zer otrzymanych transmitancji dyskretnych  $G(z)$ ?

**2.2** Przeanalizować na wspólnym wykresie odpowiedzi skokowe i impulsowe wszystkich otrzymanych transmitancji dyskretnych (dla różnych wartości okresu próbkowania  $T_p$ ) i porównać je z przebiegiem odpowiedzi obiektu ciągłego (8) – wykorzystać nakładkę *LTI Viewer*.

- Jaki jest wpływ wartości okresu próbkowania na dokładność aproksymacji odpowiedzi obiektu ciągłego?
- Czym różnią się odpowiedzi czasowe obiektu powstałego w wyniku dyskretyzacji transformacją impulsowo-inwariantną (definicja C) od odpowiedzi pozostałych obiektów dyskretnych (skorzystać w nakładce *LTI Viewer* z polecenia *Normalize*)? Czy różnice te zanikają dla jakiejś konkretnej wartości okresu próbkowania  $T_p$ ?

### 3 Wpływ szybkości próbkowania na jakość pracy URA

W układach regulacji z regulatorami impulsowymi (cyfrowymi) kwestia szybkości próbkowania sygnałów ciągłych odgrywa istotną rolę z punktu widzenia jakości regulacji i stabilności całego URA. Dobór okresu próbkowania  $T_p$  winien wynikać z twierdzenia o próbkowaniu oraz z możliwości obliczeniowych zastosowanego układu cyfrowego<sup>3</sup>. Wydłużanie wartości okresu próbkowania  $T_p$  można interpretować jako zwiększenie opóźnienia w reakcji regulatora na zmiany sygnału uchybu (lub innych sygnałów próbkowanych i wykorzystywanych podczas obliczeń regulatora). Taka interpretacja pozwala intuicyjnie zrozumieć wpływ szybkości próbkowania na stabilność systemu.

Dany jest ciągły model obiektu sterowania w postaci następującej transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{1}{(1 + sT)(1 + s)^2} . \quad (9)$$

**3.1** Korzystając ze środowiska SIMULINK zamodelować URA z regulatorem proporcjonalnym o wzmocnieniu  $k_p = 2$  i obiektem regulacji (9) ze stałą czasową  $T = 1[s]$  w dwóch wersjach:

- a) z regulatorem impulsowym – z ekstrapolatorem zerowego rzędu<sup>a</sup> w torze głównym między wzmacniaczem a obiektem regulacji,
- b) z regulatorem ciągłym (bez ekstrapolatora i impulsatora).

Przeprowadzić symulacje i porównać działanie obu URA (ciągłego i impulsowego – rys. 4) przy wymuszeniu skokowym (sygnał zadany  $x(t) = \mathbf{1}(t)$ ) dla następujących wartości okresu próbkowania w układzie impulsowym:

$$T_p = \{0.01[s], 0.1[s], 1[s], 2[s], 3[s], 3.5[s], 3.8[s], 4[s]\}.$$

Porównania jakości pracy obu URA (rys. 4) dokonać na podstawie przebiegów sygnałów sterujących, sygnałów odpowiedzi i uchybu oraz w oparciu o wartość następującego wskaźnika jakości:

$$J = \int_0^{t_h} |y_2(t) - y_1(t)| dt, \quad (10)$$

gdzie  $t_h = 70[s]$  jest czasowym horyzontem symulacji.

- Czy wartość okresu próbkowania  $T_p$  ma wpływ na jakość działania impulsowego URA oraz położenie biegunów układu zamkniętego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $z$ ? Czy wartość okresu próbkowania  $T_p$  ma wpływ na stabilność impulsowego URA?

<sup>a</sup>W SIMULINK-u ekstrapolator spełnia jednocześnie funkcję impulsatora.

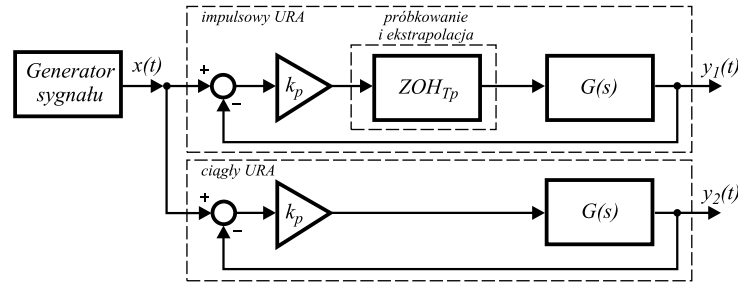
<sup>3</sup>Najczęściej obliczenia regulatora realizuje się za pomocą mikrokontrolerów ogólnego przeznaczenia lub procesorów sygnałowych DSP.

- 3.2** Przyjmując stały okres próbkowania impulsatora  $T_p = 0.5[s]$  zbadać wpływ wartości wzmacnienia regulatora  $k_p$  na jakość pracy i stabilność impulsowego URA analizowanego w poprzednim punkcie. Stabilność badać dla następujących wartości wzmacnienia:

$$k_p = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Działanie impulsowego URA porównać z jakością pracy ciągłego URA (przeanalizować sygnały odpowiedzi, uchybu i sterowania oraz wartość wskaźnika (10)).

- Czy wartość wzmacnienia  $k_p$  regulatora ma wpływ na jakość działania i stabilność impulsowego URA? Wyjaśnić zaobserwowany efekt.
- Czy zwiększając okres próbkowania  $T_p$  zmieni się również wartość wzmacnienia  $k_p$ , dla której układ impulsowy utraci stabilność?



Rysunek 4: Schemat blokowy pozwalający na porównanie działania ciągłego i impulsowego URA z regulatorem proporcjonalnym.

- 3.3** Przyjmując stały okres próbkowania impulsatora  $T_p = 3[s]$  oraz stałe zwzmacnienie regulatora  $k_p = 2$  zbadać wpływ wartości stałej czasowej inercji  $T$  obiektu sterowania na jakość pracy i stabilność impulsowego URA analizowanego w poprzednim punkcie. Przyjąć następujące wartości stałej czasowej inercji:

$$T = \{4, 2, 1, 0.1\}.$$

Działanie impulsowego URA porównać z jakością pracy ciągłego URA (przeanalizować sygnały odpowiedzi, uchybu i sterowania oraz wartość wskaźnika (10)).

- Czy wartość stałej czasowej inercji  $T$  obiektu sterowania ma wpływ na jakość działania i stabilność impulsowego URA (przy danych wartościach  $k_p$  i  $T_p$ )? Wyjaśnić zaobserwowany efekt.

□

## 4 Wpływ kwantyzacji na jakość pracy URA

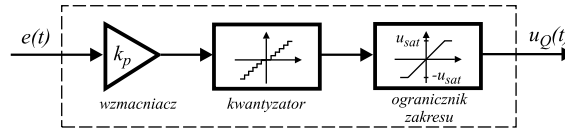
Proces kwantyzacji polega na wprowadzeniu skończonej reprezentacji wartości próbki sygnału. W układach impulsowych (cyfrowych) reprezentacja ta wynika ze skończonej ilości bitów tworzących liczbę reprezentującą wartość danej próbki sygnału. Liczba bitów reprezentacji (w założonym zakresie zmienności wartości sygnału) decyduje o rozdzielczości układu cyfrowego, a tym samym o wielkości tzw. szumu kwantyzacji, który wprowadzany jest do układu przez układ cyfrowy<sup>4</sup>. Rozdzielczość w układzie cyfrowym określa się w następujący sposób:

$$Q = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^N - 1}, \quad (11)$$

<sup>4</sup>Można pokazać, że odstęp mocy sygnału użytecznego od mocy szumu kwantyzacji określa zależność:  $SNR = (6N - 7.3)[dB]$ , gdzie  $N$  stanowi liczbę bitów reprezentacji sygnału skwantowanego.

gdzie  $N$  jest liczbą bitów cyfrowej reprezentacji wartości sygnału (lub bitową rozdzielczością przetwornika A/C), a  $x_{min}, x_{max}$  stanowią założone odpowiednio minimalną i maksymalną wartość mierzonego i kwantyzowanego sygnału  $x(t)$ .

W tej części ćwiczenia należy zbadać wpływ procesu kwantyzacji sygnału sterującego na jakość działania URA<sup>5</sup>.



Rysunek 5: Schemat blokowy ciągłego w czasie regulatora proporcjonalnego z kwantyzacją sygnału sterującego.

- 4.1** Przyjmując stałe wzmocnienie regulatora  $k_p = 2$ , a w transmitancji obiektu (9) wartość stałej czasowej inercji  $T = 1$ , przeprowadzić analizę jakości pracy ciągłego URA z kwantyzatorem w torze sterowania (sygnał sterujący  $u(t) = u_Q(t)$  może przyjmować tylko skończona liczba wartości z założonego zakresu) dla skokowego sygnału zadanego  $x_d = \mathbf{1}(t)$ . Kwantyzator zrealizować jako szeregowe połączenie bloków *Quantizer* (z parametrem  $Q$  z równania (11), w którym  $x \equiv u$ ) oraz *Saturation* (z parametrami  $u_{max}, u_{min}$ ) – rys. 5. Symulacje działania URA wykonać dla następujących zestawów parametrów kwantyzatora i ogranicznika:

$$u_{min} = -4, \quad u_{max} = 4, \quad N = \{2, 3, 4, 8, 16\}.$$

Działanie URA z kwantyzatorem porównać z jakością pracy ciągłego URA bez kwantyzacji (przeanalizować sygnały odpowiedzi, uchybu i sterowania oraz wartość wskaźnika (10)).

- Jaka jest rozdzielczość sygnału  $u_Q$  regulatora (wzmacniacz  $k_p$  + kwantyzator) w każdym z analizowanych przypadków (wykorzystać wzór (11), w którym  $x \equiv u$  do przeprowadzenia obliczeń).
  - Czy liczba bitów reprezentacji  $N$  ma znaczący wpływ na dynamiczną i statyczną jakość regulacji?
  - Jaki kształt ma sygnał sterujący  $u_Q(t)$ ? Czy chwile zmiany wartości sterowania są równo oddalone od siebie w dziedzinie czasu tak jak w przypadku układów impulsowych?
- 4.2** Do URA z kwantyzatorem z punktu poprzedniego dodać (szeregowo za kwantyzatorem regulatora) ekstrapolator zerowego rzędu (otrzymamy teraz układ impulsowy). Przeprowadzić symulacje działania impulsowego URA z kwantyzatorem w regulatorze impulsowym dla następujących wartości parametrów:

$$u_{min} = -4, \quad u_{max} = 4, \quad N = \{4, 12\}, \quad T_p = \{2, 1, 0.5, 0.1\}.$$

- Czy zmiana rozdzielczości kwantyzatora ( $N = 4$  lub  $N = 12$ ) wpływa znacząco na jakość działania URA dla dużych wartości okresu próbkowania  $T_p \geq 1$ ?
- Które ze zjawisk: próbkowanie czy kwantyzacja mają podstawowe znaczenie dla jakości regulacji w impulsowym URA?

<sup>5</sup>Analizowany układ będzie systemem ciągłym, aby wykluczyć efekt związany z procesem próbkowania sygnału w czasie, który był poruszany w poprzednim punkcie ćwiczenia. Dodatkowo pomija się tutaj kwantyzację innych sygnałów poza sterowaniem.



## 5 Realizacja regulatorów w układach cyfrowych

W praktyce zwykle mamy do czynienia z ciągłymi obiektami regulacji, które można opisać za pomocą transmitancji  $G(s)$ . Jednak ze względu na rozwój techniki cyfrowej oraz liczne zalety układów cyfrowych<sup>6</sup> elementy regulacyjne (regulatory) i korekcyjne (korektory) realizuje się dzisiaj przeważnie w postaci cyfrowej (algorytmy regulacji i korekcji zaszyte są w postaci programów w pamięci mikrokontrolerów lub procesorów sygnałowych DSP). Aby zrealizować cyfrowy regulator opisywany dyskretną transmitancją  $R(z)$  można postępować według następującej procedury:

- 1° przyjąć strukturę regulatora ciągłego poprzez wybór jego transmitancji  $R(s)$ ,
- 2° dokonać syntezy parametrycznej regulatora  $R(s)$  w oparciu o kryteria jakościowe w ciągłej dziedzinie czasu,
- 3° wykorzystać jedną z transformacji częstotliwościowych D-F (z punktu 2) do zaprojektowanego wcześniej regulatora  $R(s)$ , aby uzyskać przejście do transmitancji  $R(z)$ ,
- 4° przejść z opisu transmitancyjnego  $R(z)$  do postaci czasowej (w dyskretniej dziedzinie czasu  $t = kT_p$ ) i zgodnie z czasową interpretacją uzyskanego równania zaimplementować algorytm regulacji na docelowym układzie cyfrowym z odpowiednio dobranym okresem próbkowania<sup>7</sup>.

Celem tej części ćwiczenia będzie implementacja regulatorów cyfrowych i porównanie pracy układów regulacji z regulatorami ciągłymi i ich odpowiednikami impulsowymi.

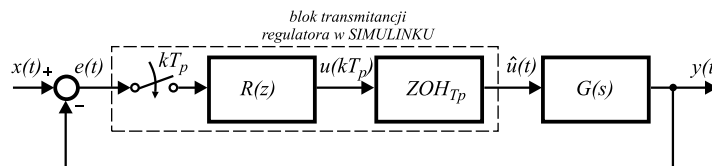
Rozważmy ciągły liniowy obiekt regulacji opisany przykładową transmitancją:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (12)$$

oraz ciągły regulator PI

$$R(s) = k_p + \frac{1}{sT_i} \quad (13)$$

z następującymi wartościami parametrów:  $k_p = 1$ ,  $T_i = 0.1$ .



Rysunek 6: Schemat blokowy URA z regulatorem impulsowym i ciągłym obiektem regulacji.

- 5.1** Dokonać dyskretyzacji regulatora ciągłego (13) dwoma metodami: poprzez transformację Euler'a (definicja E) oraz transformację Tustin'a (definicja D). Porównać uzyskane transmitancje  $R(z)$ . Przejść z postaci transmitancyjnej  $R(z)$  na postać czasową i porównać uzyskane równania różnicowe dla obu transformacji.

<sup>6</sup>Oczywiście nie zawsze układy cyfrowe stanowią lepsze rozwiązanie z stosunku do analogowych – czasami elementy analogowe są nie do zastąpienia i stanowią jedyne słyszalne rozwiązanie.

<sup>7</sup>W przypadku naszego ćwiczenia ostatni etap nie jest wymagany ze względu na to, że środowisko MATLAB-SIMULINK przyjmuje postać transmitancyjną  $R(z)$  regulatora i automatycznie wykonuje za nas potrzebne obliczenia w dyskretniej dziedzinie czasu.

- 5.2** Zamodelować uzyskane regulatory w postaci odpowiednich transmitancji  $R(z)$  na jednym schemacie blokowym<sup>a</sup> z ciągłym obiektem regulacji (12) – rys. 6. UWAGA: we właściwościach bloku *Discrete Transfer Fcn* w polu *Sample Time* wprowadzić wartość okresu próbkowania  $T_p$ , dla której obliczona została dana transmitancja dyskretna regulatora.

- 5.3** Przeprowadzić symulacje działania URA z obiektem (12) i wyprowadzonymi regulatorami (w postaci transmitancyjnej) dla następującego zestawu wartości okresu próbkowania:

$$T_p = \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}.$$

Jakość działania URA z regulatorami cyfrowymi porównać z jakością pracy ciągłego URA (z ciągłym regulatorem (13)) – przeanalizować sygnały odpowiedzi, uchybu i sterowania.

- Czy uzyskane dwa regulatory cyfrowe dają różne wyniki działania wynikowego URA? Jakże różnice daje się zauważyć najwyraźniej?
- Czy zamknięty układ ciągły (z regulatorem ciągłym) jest stabilny strukturalnie? Czy układ impulsowy (z regulatorem impulsowym) jest strukturalnie stabilny (sprawdzić doświadczalnie)? Jak wyglądałaby implementacja każdego z regulatorów cyfrowych?

<sup>a</sup>W środowisku SIMULINK transmitancja dyskretna  $G(z)$  jest domyślnie wyposażona na wyjściu w ekstrapolator, zatem nie trzeba dodatkowo umieszczać jego bloku na schemacie regulacji – rys. 6.

Rozważmy teraz następujący obiekt regulacji:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (14)$$

z rzeczywistym regulatorem PD w zamkniętym układzie regulacji, gdzie do części różniczkującej regulatora doprowadzono sygnał wyjściowy obiektu (zamiast sygnału uchybu regulacji). Część proporcjonalną i różniczkującą regulatora ciągłego opisują transmitancje:

$$R_P(s) = k_p, \quad R_D(s) = \frac{sT_d}{1 + \tau s}, \quad \tau = 0.1T_d \quad (15)$$

z następującymi wartościami poszczególnych parametrów:  $k_p = 1$ ,  $T_d = 1$ ,  $\tau = 0.1$ .

- 5.4** Dokonać dyskretyzacji regulatora ciągłego (15) dwoma metodami: poprzez transformację Euler'a (definicja F) oraz transformację Tustin'a (definicja D). Porównać uzyskane transmitancje bloku różniczkującego  $R_D(z)$ . Przejść z postaci transmitancyjnej  $R_D(z)$  na postać czasową i porównać uzyskane równania różnicowe dla obu transformacji bloku D.

- 5.5** Zamodelować uzyskane regulatory w postaci odpowiedniego połączenia wzmacniacza z ekstrapolatorem oraz transmitancji  $R_D(z)$  na jednym schemacie blokowym<sup>a</sup> z ciągłym obiektem regulacji (14) w postaci transmitancji  $G(s)$ .

- 5.6** Przeprowadzić symulacje działania URA z obiektem (14) i wyprowadzonymi regulatorami dla następującego zestawu wartości okresu próbkowania:

$$T_p = \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}.$$

Jakość działania URA z regulatorami cyfrowymi porównać z jakością pracy ciągłego URA (z ciągłym regulatorem PD (15)) – przeanalizować sygnały odpowiedzi, uchybu i sterowania.

- Czy uzyskane dwa regulatory cyfrowe dają różne wyniki działania wynikowego URA? Jak wyglądałaby implementacja każdego z regulatorów cyfrowych?

<sup>a</sup>Należy pamiętać o odpowiednim znaku przy sumatorze regulatora (!).

□