Podstawy Automatyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 5

Charakterystyki częstotliwościowe podstawowych elementów dynamicznych.

Ćwiczenie ma na celu poznanie charakterystyk częstotliwościowych podstawowych elementów dynamicznych oraz zależności pomiędzy nimi. Podczas ćwiczenia zostanie również przebadany wpływ zmiany wartości parametrów obiektów na te charakterystyki.

1 Wprowadzenie

W poprzednim ćwiczeniu zdefiniowano dwa sposoby opisu właściwości dynamicznych układu, równanie różniczkowe oraz transmitancja operatorowa. W niniejszym opracowaniu wprowadzony zostanie kolejny sposób, tzw. **transmitancja widmowa**.

Transmitancja widmowa $G(j\omega)$ stanowi analogiczne wyrażenie do transmitancji operatorowej, różniące się jedynie zamianą zmiennej s na $j\omega$, co można zapisać następująco:

$$G(j\omega) = G(s)\mid_{s=j\omega} \tag{1}$$

Transmitancja widmowa jest równa stosunkowi wartości zespolonej odpowiedzi układu, wywołanej wymuszeniem harmonicznym, do wartości zespolonej tego wymuszenia, w stanie ustalonym. Transmitancja widmowa opisuje zatem odtwarzanie przez układ zmieniającego się sygnału wejściowego.

W ogólnym przypadku, gdy układ dynamiczny jest pobudzony sygnałem harmonicznym, postać sygnału wejściowego jest następująca:

$$\overline{u}(t) = U_a(cos\omega t + jsin\omega t) = U_a e^{j\omega t} \tag{2}$$

gdzie U_a jest amplitudą sygnału, a ω jest równa jego pulsacji. Dla tak zdefiniowanego sygnału wejściowego odpowiedź układu ma również charakter harmoniczny. Sygnał wyjściowy ma taką samą pulsację ω, jak sygnał wejściowy, lecz inną amplitudę Y_a oraz przesunięcie fazowe φ:

$$\overline{y}(t) = Y_a(cos(\omega t + \varphi) + jsin(\omega t + \varphi)) = Y_a e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{3}$$

Dla tak zdefiniowanych sygnałów transmitancja widmowa przyjmuje postać:

$$G(j\omega) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \tag{4}$$

Moduł opisanej transmitancji widmowej, jest równy stosunkowi amplitud sygnałów odpowiedzi i wymuszenia:

$$|G(j\omega)| = A(\omega) = \frac{Y_a}{U_a} \tag{5}$$

Argument transmitancji widmowej jest równy przesunięciu fazowemu pomiędzy sygnałem wyjściowym a wejściowym:

$$arg\, G(j\omega) = \varphi(\omega) \tag{6}$$

Transmitancję widmową przedstawia się również w postaci algebraicznej:

$$G(j\omega) = A(\omega)cos\varphi(\omega) + jA(\omega)sin\varphi(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \tag{7}$$

gdzie:

$$\begin{cases} P(\omega) & = Re\,[G(j\omega)] \\ Q(\omega) & = Im\,[G(j\omega)] \end{cases} \tag{8}$$

Transmitancję widmową układu można wyznaczyć doświadczalnie poprzez wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych. W tym celu należy dokonać pomiarów amplitudy i przesunięcia fazy sinusoidalnego przebiegu wyjściowego układu, gdy na wejście doprowadzany jest sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie i częstotliwości. Pomiary należy wykonać dla różnych częstotliwości z zakresu $(0, \infty)$, nanosząc kolejne punkty charakterystyk. Istnieją dwa najczęściej stosowane rodzaje charakterystyk częstotliwościowych:

- przedstawienie transmitancji widmowej w postaci charakterystyk amplitudowej (zależność modułu transmitancji widmowej $A(\omega)$ od pulsacji ω) oraz fazowej (zależność argumentu transmitancji widmowej $\varphi(\omega)$ od pulsacji ω). Dla każdego układu tworzy się dwie charakterystyki i umieszcza jedną pod drugą. Nazywane są wówczas **charakterystykami Bodego**. Zazwyczaj charakterystyki te wykreśla się w skali logarytmicznej.
- przedstawienie transmitancji widmowej w postaci charakterystyki amplitudowo-fazowej, na płaszczyźnie $P(\omega)$, $jQ(\omega)$. Transmitancja widmowa dla każdej pulsacji, np. $\omega = \omega_1$ jest liczbą zespoloną, którą można przedstawić za pomocą punktu o współrzędnych $P(\omega_1)$, $Q(\omega_1)$. Wykres ten nazywany jest **charakterystyką Nyquista**.

2 Badanie charakterystyk częstotliwościowych podstawowych liniowych obiektów dynamicznych SISO

Po utworzeniu transmitancji obiektu można przebadać jego charakterystyki częstotliwościowe. Funkcja *bode* służy do wykreślania charakterystyk amplitudowej i fazowej obiektu, natomiast *nyquist* – charakterystyki amplitudowo-fazowej:

```
>> bode(transmitancja_obiektu)
>> nyquist(transmitancja_obiektu)
```

Istnieje również możliwość określenia zakresu częstotliwości, dla których zostanie utworzony wykres. Polecenia:

```
>> bode(transmitancja_obiektu, {wmin, wmax})
>> nyquist(transmitancja_obiektu, {wmin, wmax})
```

wytworzą wykresy Bodego oraz Nyquista dla częstotliwości z zakresu (*wmin*, *wmax*), przy czym wartości te są podawane w $[\frac{rad}{s}]$.

Aby wyświetlić kilka wykresów w jednym oknie można posłużyć się poleceniem *hold on*, lub wywołać funkcje *bode* i *nyquist* z większą liczbą parametrów wejściowych:

```
>> bode(transmitancja_obiektu, transmitancja_obiektu2, ...)
>> nyquist(transmitancja_obiektu, transmitancja_obiektu2, ...)
```

Funkcje wywołane bez podania argumentów wyjściowych, powodują otworzenie nowego okna wykresu zawierającego odpowiednie charakterystyki częstotliwościowe. W przypadku wywołania funkcji *bode* z parametrami wyjściowymi:

```
>> [mag, phase] = bode(transmitancja_obiektu, w)
```
[1]

nastąpi przypisanie zmiennej *mag* wartości modułu transmitancji widmowej, zmiennej *phase* - wartości fazy, dla częstotliwości zapisanych w wektorze *w*. Aby utworzyć wektor częstotliwości w skali logarytmicznej, należy wykorzystać funkcję *logspace*. Przykładowo:

```
>> w = logspace(-2, 2)
```

Utworzy wektor złożony z 50 równo rozłożonych elementów w skali logarytmicznej, z których pierwszy będzie równy 10^{-2} a ostatni 10^2.

Aby uzyskać wartości modułu w dB należy wywołać polecenie:

```
>> mag_dB = 20*log10(mag)
```

Dla funkcji nyquist parametry wyjściowe:

```
>> [re, im] = nyquist(transmitancja_obiektu, w)
```

przyjmują wartości rzeczywiste (*re*) i urojone (*im*) transmitancji widmowej, dla częstotliwości określonych w wektorze *w*. Domyślnie wykresy Nyquista rysowane są dla pulsacji $\omega \in \mathbb{R}$, jednak praktyczną interpretację posiada tylko zakres pulsacji $\omega \in (0, \infty)$. Negatywne częstotliwości można ukryć na wykresie, wykorzystując menu kontekstowe wykresu (opcja *Show*).

2.1 Za pomocą polecenia *tf* utworzyć w Matlabie obiekty o transmitancjach podanych w kolejnych punktach zadania. Dla każdego z elementów wykonać symulację wykresów Bodego, za pomocą polecenia *bode,* oraz charakterystyk Nyquista, za pomocą polecenia *nyquist.* Przeanalizować wpływ zmiany wartości parametrów danych transmitancji.

2.2 Obiekt proporcjonalny (parametr k):

$$G(s) = k$$

2.3 Obiekt inercyjny I-go rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{sT+1}$$

2.4 Obiekt inercyjny II-go rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{(sT+1)^2}$$

2.5 Obiekt oscylacyjny (parametry k, T_n, ξ):

$$G(s) = \frac{k}{s^2T_n^2+2\xi T_n s+1}$$

[1] Parametr *w* jest opcjonalny.

2.6 Obiekt inercyjny 5-tego rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{(sT+1)^5}$$

2.7 Obiekt całkujący idealny (parametr k):

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

2.8 Obiekt całkujący rzeczywisty (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{s(sT+1)}$$

2.9 Obiekt różniczkujący rzeczywisty (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{sk}{sT+1}.$$

3 Określanie związku pomiędzy charakterystykami Bodego a charakterystyką amplitudowo-fazową

Relację pomiędzy charakterystykami Bodego, przedstawiającymi wartości $Lm(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ w zależności od wartości ω, a wykresem Nyquista, prezentującymi wartości $P(\omega)$ i $Q(\omega)$, można można otrzymać na bazie równania 7. Równania określające związek pomiędzy wartościami $Lm(\omega)$ i $\varphi(\omega)$, a $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ przedstawiono równaniem 9.

$$\begin{gathered} Lm(\omega) = 20log_{10}\left|G(j\omega)\right| = 20log_{10}\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \end{gathered} \tag{9}$$

3.1 Utworzyć w Matlabie obiekt różniczkujący rzeczywisty o transmitancji:

$$G(s) = \frac{3s}{6s+1}$$

3.2 Utworzyć wektor częstotliwości w zawierający wartości od 10^{-2} do 10. Wykorzystać polecenie *logspace*.

3.3 Utworzyć wektor *re* zawierający wartości rzeczywiste transmitancji widmowej oraz wektor *im*, zawierający wartości urojone. Wykorzystać polecenie *nyquist*.

3.4 Zmienić rozmiar wektorów *re* oraz *im* tak, aby ich długość odpowiadała długości wektora *w*. Wykorzystać polecenie *reshape*.

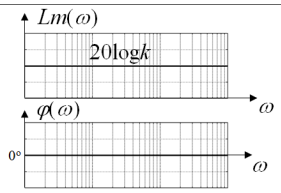
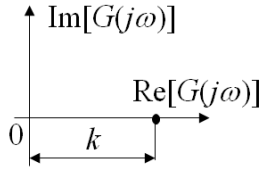
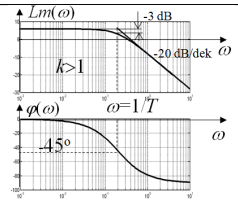
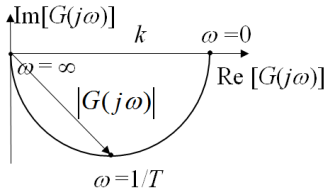
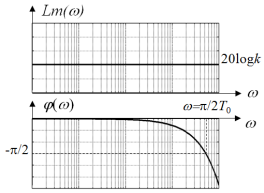
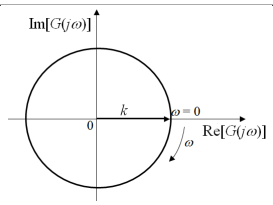
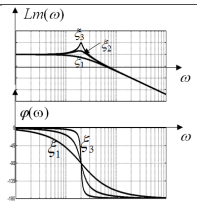
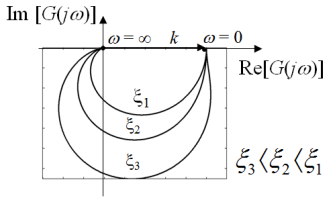
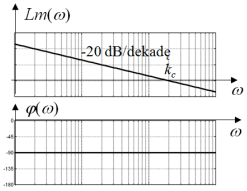
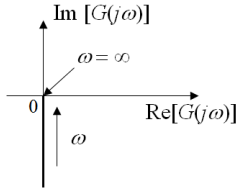
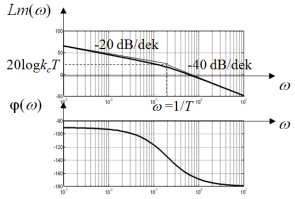
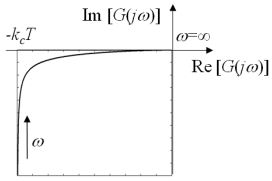
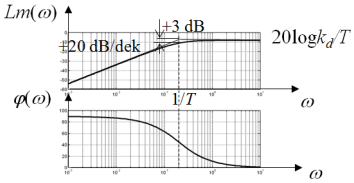
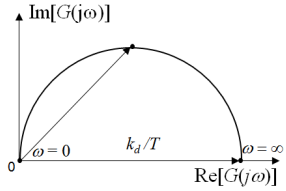
3.5 Obliczyć wartość modułu $Lm(w)$ w skali logarytmicznej.

3.6 Za pomocą polecenia *semilogx*, utworzyć wykres zależności modułu $Lm(w)$ od częstotliwości w, którego oś x będzie wyrażona w skali logarytmicznej. Nadać linii kolor czerwony

3.7 Porównać uzyskany wykres, z wykresem otrzymanym za pomocą polecenia *bode* (wykorzystać funkcję *hold on*).

Dodatek A

Charakterystyki częstotliwościowe podstawowych obiektów dynamicznych

Nazwa obiektu	Charakterystyki Bodego	Charakterystyka amplitudowo-fazowa
Proporcjonalny		
Inercyjny I-go rzędu		
Opóźniający		
Oscylacyjny		
Całkujący idealny		
Całkujący rzeczywisty		
Różniczkujący rzeczywisty		

Tablica 1: *Charakterystyki częstotliwościowe podstawowych obiektów dynamicznych.*

Dodatek B

Przykłady wyznaczania wykresów Bodego i Nyquista

Obiekt proporcjonalny

Transmitancja operatorowa obiektu proporcjonalnego przyjmuje następującą postać:

$$G(s) = k.$$

Dla obiektu można również zapisać transmitancję widmową w formie:

$$G(j\omega) = k = k + j0 = ke^{j0.}$$

Na tej bazie można określić wartości części rzeczywistej $P(\omega)$ i urojonej $Q(\omega)$ obiektu:

$$P(\omega) = k, \quad Q(\omega) = 0,$$

co przedstawia wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej w Dodatku A.

Aby wykreślić charakterystyki Bodego, należy obliczyć wartości modułu $Lm(\omega)$ w skali logarytmicznej oraz fazy $\varphi(\omega)$ obiektu:

$$Lm(\omega) = 20log\,|G(j\omega)| = 20log(k),$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctan\frac{0}{k} = 0.$$

Zatem, zarówno moduł jak i faza obiektu, są niezmienne względem częstotliwości, co przedstawiają linie proste charakterystyk Bodego obiektu proporcjonalnego.

Obiekt inercyjny I-go rzędu

Transmitancja operatorowa obiektu inercyjnego I-go rzędu jest postaci:

$$G(s) = \frac{k}{1+sT}.$$

Można również zapisać transmitancję widmową, w formie:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{k(1-j\omega T)}{1+\omega^2T^2} = \frac{k}{1+\omega^2T^2} - j\frac{\omega kT}{1+\omega^2T^2} = P(\omega)+jQ(\omega).$$

Z powyższego równania wynikają następujące postaci części rzeczywistej i urojonej:

$$P(\omega) = \frac{k}{1+\omega^2T^2}, \quad Q(\omega) = -\frac{\omega kT}{1+\omega^2T^2}.$$

Przy założeniu, że rozpatrywane będą tylko częstotliwości dodatnie, można wywnioskować, że $Q(\omega) \leq 0$.

Następnie na podstawie $P(\omega)$ można obliczyć ω:

$$P(\omega) + P(\omega)\omega^2T^2 = k,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)T^2}}.$$

Po podstawieniu ω do $Q(\omega)$, można otrzymać:

$$Q(\omega) = -\frac{\sqrt{\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)T^2}}kT}{1+\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)T^2}T^2} = -\frac{\sqrt{\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)}}k}{1+\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)}} = -\frac{k\sqrt{\frac{k-P(\omega)}{P(\omega)}}}{\frac{k}{P(\omega)}} = -\sqrt{kP(\omega)-P^2(\omega)}.$$

Następnie przez podniesienie do drugiej potęgi obu stron równania, otrzymuje się:

$$Q^2 = kP - P^2.$$

Po dopełnieniu wzoru na kwadrat sumy:

$$Q^2 + P^2 - kP + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = 0$$

otrzymać można równanie koła:

$$Q^2 + (P - \frac{1}{2}k)^2 = (\frac{1}{2}k)^2.$$

Z przeprowadzonych wyżej obliczeń wynika, że charakterystyka Nyquista przyjmuje postać okręgu o promieniu $\frac{k}{2}$ oraz o środku w punkcie $(\frac{k}{2}, 0)$. Jednak przy uwzględnieniu wcześniej przyjętego założenia, że $Q(\omega) \leq 0$ można wywnioskować, że charakterystyka amplitudowo-fazowa przyjmuje postać połowy okręgu (Dodatek A).

Wykreślanie charakterystyk Bodego rozpoczyna się od obliczenia wartości modułu transmitancji w skali logarytmicznej:

$$Lm(\omega) = 20log\,|G(j\omega)| = 20log\sqrt{\left(\frac{k}{1+\omega^2T^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega kT}{1+\omega^2T^2}\right)^2} =$$

$$= 20log\sqrt{\frac{k^2+\omega^2k^2T^2}{(1+\omega^2T^2)^2}} = 20log\sqrt{\frac{k^2(1+\omega^2T^2)}{(1+\omega^2T^2)^2}} = 20log\left(\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\right) =$$

$$= 20log(k) - 20log\sqrt{1+\omega^2T^2} = Lm_1(\omega) + Lm_2(\omega).$$

Ze względu na skomplikowaną postać wyrażenia, dzieli się je na dwie składowe. Każdą ze składowych przedstawia się w formie wykresu, natomiast charakterystyka częstotliwościowa amplitudy $Lm(\omega)$ jest ich sumą. Składowa stała $Lm_1(\omega)$ jest przedstawiona w postaci linii prostej (Rys. 1). Dla wyrażenia $Lm_2(\omega)$ należy rozpatrzyć dwa przypadki. Pierwszy to ten, w którym większe znaczenie w argumencie logarytmu ma wartość 1, tzn:

$1 \gg \omega^2T^2 \rightarrow \omega \ll \frac{1}{T}$, wówczas $20log\sqrt{1+\omega^2T^2} \approx 20log\sqrt{1} = 0$.

W drugim przypadku, większe znaczenie posiada element częstotliwości ω^2T^2:

$1 \ll \omega^2T^2 \rightarrow \omega \gg \frac{1}{T}$, wówczas $-20log\sqrt{1+\omega^2T^2} \approx -20log\sqrt{\omega^2T^2} = -20log(\omega T)$.

Zatem składowa $Lm_2(\omega)$ przyjmuje wartość 0 dla małych wartości częstotliwości $\omega \ll \frac{1}{T}$, natomiast dla wyższych częstotliwości przyjmuje postać prostej, której nachylenie należy obliczyć. Nachylenie liczone jest dla jednej dekady, np.:

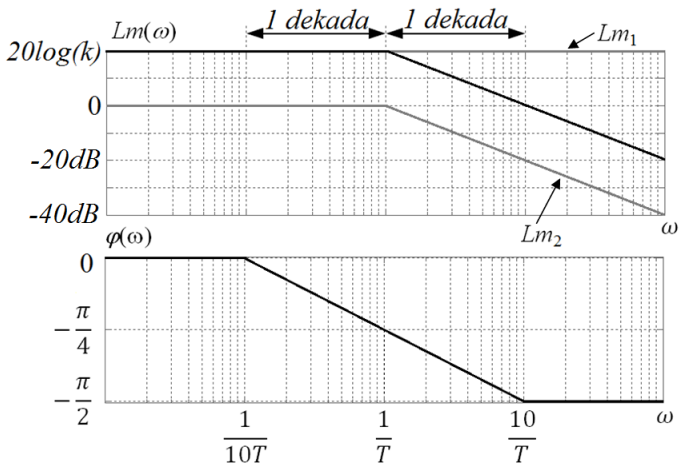
$$Lm(10\omega) - Lm(\omega) = (20log(k) - 20log(10T\omega)) - (20log(k) - 20log(T\omega)) =$$

$$= -20log(10T\omega) + 20log(T\omega) = 20log(\frac{T\omega}{10T\omega}) = -20log(10) = -20dB/dekadę.$$

Wykres składowej $Lm_2(\omega)$ oraz $Lm(\omega)$ został przedstawiony na Rys. 1.

Aby wykreślić charakterystykę fazową, należy obliczyć fazę obiektu w zależności od częstotliwości:

$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctan\frac{-\frac{\omega kT}{1+\omega^2T^2}}{\frac{k}{1+\omega^2T^2}} = \arctan\frac{-\omega kT}{k} = \arctan(\omega T).$$



Rysunek 1: *Charakterystyki Bodego obiektu inercyjnego I-go rzędu.*

Obiekt całkujący z inercją (charakterystyka Nyquista)

W niektórych przypadkach postać części rzeczywistej i urojonej transmitancji widmowej obiektu jest zbyt skomplikowana, aby obliczyć prostą relację pomiędzy $P(\omega)$ a $Q(\omega)$. Dlatego charakterystyka Nyquista jest wyznaczana na podstawie punktów charakterystycznych. Przykładem obrazującym taki przypadek jest obiekt całkujący z inercją:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+sT)}.$$

Można zapisać jego transmitancję widmową w formie:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-jk}{\omega(1+j\omega T)} = \frac{-jk(1-j\omega T)}{\omega(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{-jk(1-j\omega T)}{\omega(1+\omega^2T^2)} =$$

$$= \frac{-\omega kT}{\omega(1+\omega^2T^2)} - j\frac{k}{\omega(1+\omega^2T^2)} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Zatem części rzeczywista i urojona przyjmują poniższą postać.

$$P(\omega) = \frac{-\omega kT}{\omega\left(1+\omega^2T^2\right)}, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega\left(1+\omega^2T^2\right)}.$$

Oblicza się ich wartości tylko dla pewnych charakterystycznych wartości częstotliwości, jak opisano poniżej.

$$P(\omega)\mid_{\omega=0} = -kT, \quad Q(\omega)\mid_{\omega=0} = -\infty$$

$$P(\omega)\mid_{\omega=\frac{1}{T}} = -\frac{kT}{2}, \quad Q(\omega)\mid_{\omega=\frac{1}{T}} = -\frac{kT}{2}$$

$$P(\omega)\mid_{\omega\to\infty} = 0, \quad Q(\omega)\mid_{\omega\to\infty} = 0$$