Podstawy Automatyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 6

Modelowanie systemów fizycznych.

Celem ćwiczenia jest modelowanie układów fizycznych oraz symulacja ich charakterystyk czasowych i częstotliwościowych. Ćwiczenie polega na wyprowadzeniu modeli dla dwóch zadanych systemów fizycznych, zamodelowaniu równań dynamiki w postaci schematów blokowych pakietu Simulink i przeprowadzeniu symulacji odpowiedzi czasowych i częstotliwościowych dla badanych układów.

1 Wprowadzenie

Jedną z metod badania właściwości dynamicznych układu jest przeprowadzenie eksperymentu bezpośrednio na układzie. Jednak w niektórych przypadkach przeprowadzenie eksperymentu jest problematyczne, a jego niewłaściwe wykonanie może powodować uszkodzenie układu. Dlatego często w pierwszej fazie analizy właściwości układu, przeprowadza się badania na modelu układu fizycznego. Modelem układu nazywamy jego reprezentację za pomocą relacji matematycznych przedstawiającej, z pewnym uproszczeniem, jego właściwości. Model matematyczny układu ciągłego jest najczęściej opisany równaniami różniczkowymi.

W opisywanym ćwiczeniu konieczne będzie zastosowanie metody klasycznej oraz metody równań Lagrange'a II rodzaju, jako metod służących do pozyskiwania modelu układu fizycznego. Pierwsza z metod opiera się na bezpośrednim opisaniu równań dynamiki (sił lub momentów) w oparciu o zasadę d'Alemberta. Z zasady tej wynika, że suma sił zewnętrznych i wewnętrznych oraz sił bezwładności danego układu punktów materialnych, jak również suma momentów tych sił względem punktu stałego lub środka masy, równają się zeru. Elementy występujące w układach dynamicznych, podzielono ze względu na rodzaj energii jakiemu odpowiadają i zebrano w tabeli 1.

	Układ mechaniczny	Układ elektryczny	Układ pneumatyczny	Układ hydrauliczny
Element powodujący straty energii	tarcie	oporność czynna	opór przepływu gazów	opór przepływu cieczy
Element magazynujący energię w postaci kinetycznej	masa, inercja, bezwładność	indukcyjność	bezwładność gazów	bezwładność cieczy
Element magazynujący energię w postaci potencjalnej	sprężystość	pojemność	ściśliwość gazów	pojemność hydrauliczna

Tablica 1: Elementy uwzględniane przy modelowaniu układów dynamicznych.

W przypadku metody równań Lagrange'a II rodzaju określa się jakie typy energii występują w układzie, a na ich bazie oblicza się równania dynamiki. Pierwszym krokiem metody, jest określenie współrzędnych uogólnionych układu fizycznego $q = [q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n]^T$ oraz wektora wymuszeń uogólnionych układu Q. Następnie należy opisać całkowitą energię kinetyczną T, potencjalną V oraz energię strat R występujących w układzie. W kolejnym kroku należy obliczyć postać funkcji Lagrange'a na bazie poniższego wzoru:

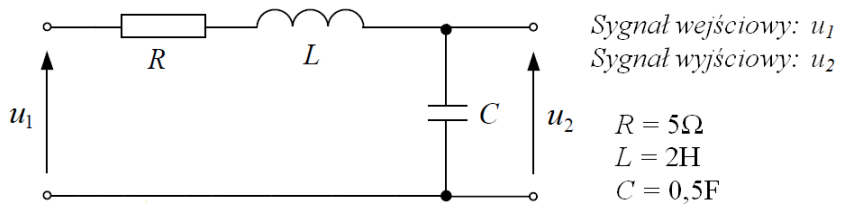
$$\alpha = T - V. \tag{1}$$

Równania dynamiki otrzymuje się za pomocą relacji (2).

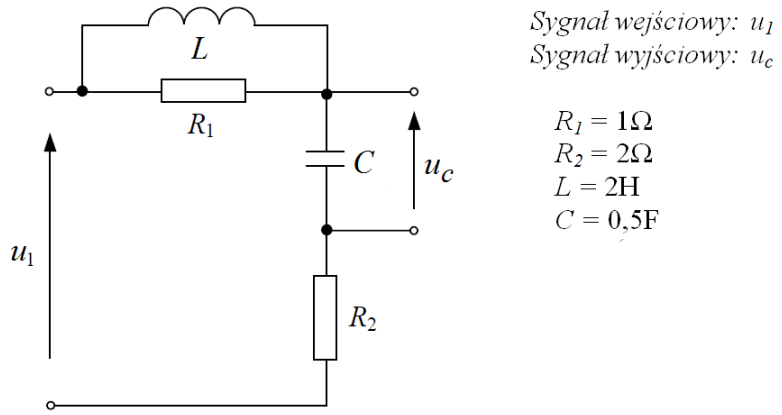
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = Q \tag{2}$$

2 Wyprowadzenie modeli systemów fizycznych

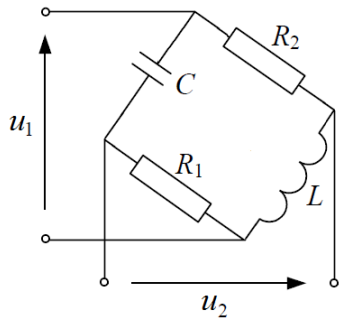
Podczas niniejszego ćwiczenia rozpatrywane będą zarówno obiekty elektryczne jak i mechaniczne. Obiekty elektryczne zostały zaprezentowane na Rys. 1 - Rys. 3, natomiast obiekty mechaniczne na Rys. 4 - Rys. 6. Szczególnym przykładem obiektu łączącym właściwości układu mechanicznego i elektrycznego, jest silnik prądu stałego, którego uproszczony model dynamiczny został przedstawiony na Rys. 7.



Rysunek 1: Układ elektryczny RLC.



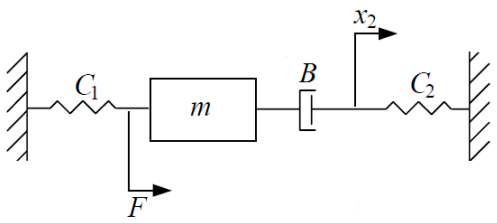
Rysunek 2: Układ elektryczny.



Sygnał wejściowy: u_1
Sygnał wyjściowy: u_2

$R_1 = 0{,}5\Omega$
$R_2 = 2\Omega$
$L = 4\text{H}$
$C = 1\text{F}$

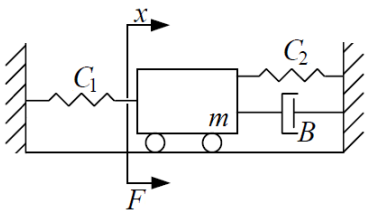
Rysunek 3: Układ elektryczny z mostkiem.



Sygnał wejściowy: F
Sygnał wyjściowy: x_2

$B = 2\text{kg/s}$
$m = 0{,}5\text{kg}$
$C_1 = 0{,}25\text{N/m}$
$C_2 = 4\text{N/m}$

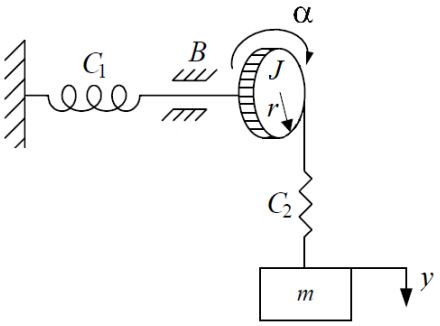
Rysunek 4: Układ mechaniczny z ruchem postępowym.



Sygnał wejściowy: F
Sygnał wyjściowy: x

$B = 3\text{kg/s}$
$m = 5\text{kg}$
$C_1 = 1{,}5\text{N/m}$
$C_2 = 0{,}5\text{N/m}$

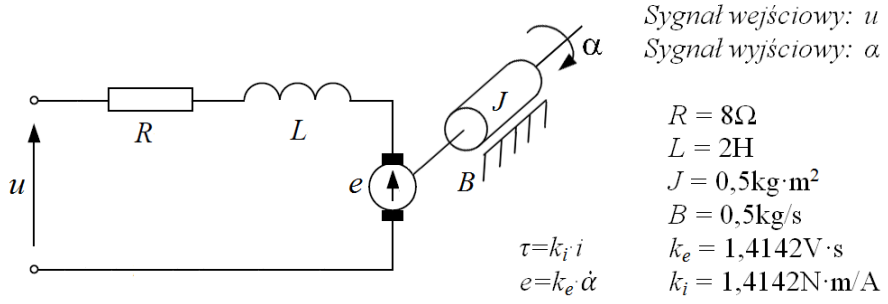
Rysunek 5: Układ mechaniczny z wózkiem.



Sygnał wejściowy: y
Sygnał wyjściowy: α

$B = 2{,}5\text{kg/s}$
$m = 1\text{kg}$
$C_1 = C_2 = 2\text{N/m}$
$r = 1\text{m}$
$J = 3\text{kg}\cdot\text{m}^2$

Rysunek 6: Układ mechaniczny obrotowy.



Rysunek 7: Model silnika prądu stałego.

2.1 Dla dwóch systemów, wskazanych przez prowadzącego zajęcia, wyprowadzić modele dynamiki metodą klasyczną lub za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju (prowadzący określa metodę).

3 Modelowanie i symulacja właściwości układów

3.1 Dla otrzymanych w poprzednim podpunkcie równań dynamiki, wyznaczyć transmitancje operatorowe, przyjmując określone dla podanych przykładów sygnały wejściowe i wyjściowe oraz zakładając zerowe warunki początkowe. Na podstawie otrzymanej transmitancji określić rodzaj obiektu.

3.2 W środowisku Matlab zamodelować otrzymane transmitancje obiektów i przeprowadzić symulację charakterystyk czasowych i częstotliwościowych. Do symulacji użyć funkcji *step*, *impulse*, *bode*, *nyquist*.

3.3 Podać analityczną postać odpowiedzi obiektu w stanie ustalonym, na sygnał wejściowy postaci:

$$u(t) = sin(3t) \tag{3}$$

Wykorzystać informacje przedstawione w instrukcji ćwiczenia 5 oraz z charakterystyk częstotliwościowych.

3.4 Zamodelować otrzymane transmitancje obiektów w postaci bloków dynamicznych Simulinka. W środowisku Simulink przeprowadzić symulacje odpowiedzi obiektów na wymuszenie (3). Porównać otrzymane wykresy z wykresami przedstawiającymi odpowiedź układu obliczoną analitycznie.

3.5 Przeprowadzić symulacje dla następujących wartości pulsacji wymuszenia (3): $\omega = \frac{1}{10}$, $\omega = 1$, $\omega = 100$. Porównać amplitudy oraz fazy odpowiedzi z wartościami z charakterystyk częstotliwościowych.