Podstawy Automatyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 8

Stabilność układów dynamicznych.

Podstawowym celem ćwiczenia jest przeprowadzenie analizy stabilności wybranych liniowych stacjonarnych układów dynamicznych SISO na podstawie bezpośredniego wyznaczania biegunów transmitancji operatorowej, kryteriów analitycznych (metoda Hurwitza) oraz graficznych (metoda Nyquista). Badaniu podlega także prosty układ regulacji automatycznej ze szczególnym uwzględnieniem wpływu nastaw regulatora na stabilność układu. Ćwiczenie wymaga przeprowadzenia analizy teoretycznej oraz badań symulacyjnych w środowisku Matlab/Simulink.

1 Wprowadzenie

Zapewnienie stabilności w pracy URA jest jednym z najważniejszych wymagań i często niezbędnym warunkiem przy projektowaniu. Pojęcie stabilności jest intuicyjnie jasne i oznacza, że układ po wyprowadzeniu ze stanu równowagi sam powraca do tego stanu. Istnieje wiele definicji stabilności i stanu równowagi, podczas niniejszego ćwiczenia przyjęto definicję Laplace'a, która mówi, że układ liniowy jest stabilny jeżeli jego odpowiedź na wymuszenie ograniczone jest również ograniczona.

Do określenia stabilności układu otwartego czy zamkniętego (z zamkniętą pętla sprzężenia zwrotnego) można posłużyć się informacją o biegunach transmitancji danego układu. Warunkiem niezbędnym i dostatecznym stabilności URA jest, aby pierwiastki jego równania charakterystycznego (bieguny transmitancji) znajdowały się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, to znaczy na lewo od osi urojonej. Jeżeli chociaż jeden z pierwiastków znajduje się w prawej półpłaszczyźnie, wówczas układ jest niestabilny. Układ znajduje się na granicy stabilności, jeśli posiada pierwiastek zerowy lub pierwiastki urojone (zespolone o zerowych częściach rzeczywistych).

Obliczanie pierwiastków równania charakterystycznego nie zawsze jest łatwe, a w niektórych przypadkach transmitancja układu nie jest znana. Wówczas można wykorzystać inną metodę pozwalająca ocenić stabilność. Podczas niniejszych ćwiczeń omówione zostaną kryterium Hurwitza oraz kryterium Nyquista.

1.1 Kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza służy do określenia czy dany układ posiada pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s. Niech równanie charakterystyczne układu będzie dane równaniem:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0, \tag{1}$$

przy czym a_i są stałymi współczynnikami. Układ będzie stabilny (wszystkie jego pierwiastki będą znajdować się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s) tylko, gdy będą spełnione oba warunki:

- Wszystkie współczynniki równania 1 powinny mieć ten sam znak. Ponieważ równanie 1 może być zawsze pomnożone przez (-1), warunek sprowadza się do $a_i \geq 0$.
- Każdy z podwyznaczników Δ_i aż do rzędu $(n-1)$, utworzony z wyznacznika głównego Δ_n, powinien być dodatni. Wyznacznik główny jest określony następująco:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Dla wyznacznika zdefiniowanego równaniem 2 można określić przykładowe podwyznaczniki:

$$\Delta_1 = a_{n-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

1.2 Kryterium Nyquista

Kryterium posiada duże znaczenie praktyczne, bowiem wyznaczenie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego jest możliwe zarówno na drodze analitycznej jak i doświadczalnej. Pozwala badać stabilność zamkniętego URA na podstawie charakterystyki Nyquista układu otwartego. Można wyodrębnić dwa przypadki kryterium Nyquista:

- układ otwarty jest stabilny: wówczas układ zamknięty jest również stabilny, gdy charakterystyka Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1,\, j0)$ dla częstotliwości $\omega \in (0, \infty)$;
- układ otwarty jest niestabilny i posiada m pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s: wówczas układ zamknięty jest stabilny, gdy charakterystyka Nyquista układu otwartego dla częstotliwości $\omega \in (-\infty, \infty)$ okrąża punkt $(-1,\, j0)$ m razy.

2 Badanie stabilności obiektu

W niniejszym ćwiczeniu rozważany będzie obiekt drugiego rzędu opisany następującą transmitancją:

$$G_O(s) = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{L_O(s)}{M_O(s)}, \tag{3}$$

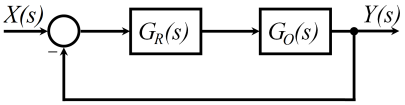
przy czym wartości k, a_2, a_1 oraz a_0 określa prowadzący zajęcia.

2.1 W środowisku Matlab określić równanie mianownika oraz wyznaczyć wartości biegunów transmitancji. Przedstawić bieguny na płaszczyźnie zespolonej. Ocenić stabilność obiektu.

2.2 Przeanalizować odpowiedź skokową i impulsową badanego obiektu.

2.3 Ocenić stabilność obiektu korzystając z metody Hurwitza.

3 Badanie stabilności URA



Rysunek 1: Przykładowy URA.

3.1 W środowisku *Simulink* zamodelować układ regulacji automatycznej o strukturze przedstawionej na rysunku 1. Przyjąć, że obiekt regulacji ma transmitancję zdefiniowaną równaniem 3, zaś regulator jest regulatorem liniowym typu *PI* o wzmocnieniu k_p oraz stałej całkowania (zdwojenia) T_i . Parametry regulatora określa prowadzący zajęcia.

3.2 Zapisać bieguny transmitancji toru otwartego. Określić na tej podstawie stabilność toru otwartego. Wniosek sprawdzić na podstawie wyników symulacji odpowiedzi skokowej i impulsowej wykonanych w środowisku *Matlab*.

3.3 W środowisku *Matlab* wykreślić charakterystykę Nyquista **toru otwartego** w zakresie pulsacji $\omega \in (0, \infty)$.

3.4 Zapisać analitycznie transmitancję operatorową **układu zamkniętego** $G_z(s)$.

3.5 Wyznaczyć wartości biegunów układu zamkniętego i określić stabilność układu. W środowisku *Simulink* zbadać odpowiedź układu na skok jednostkowy.

3.6 Korzystając z kryterium algebraicznego Hurwitza sprawdzić, czy układ o transmitancji $G_z(s)$ jest stabilny.

3.7 Wniosek potwierdzić na podstawie kryterium Nyquista wykorzystując charakterystykę amplitudowo-fazową uzyskaną dla toru otwartego w punkcie 3.3.

4 Wpływ nastaw regulatora na stabilność URA

4.1 Zapisać symbolicznie transmitancję układu zamkniętego.

4.2 Na podstawie kryterium Hurwitza wyznaczyć analitycznie związek pomiędzy parametrami k_p i T_i, tak aby zapewnić pracę układu regulacji na granicy stabilności.

4.3 Podstawiając wartości parametrów obiektu do otrzymanej powyżej zależności i wykreślić w środowisku Matlab krzywą $T_i = f(k_p)$ wyznaczającą graniczne wartości parametrów regulatora. Wskazać obszar pracy stabilnej i niestabilnej. Wybrać przykładowe wartości k_p i T_i dla obszaru stabilnego.

4.4 Dla wyznaczonych w poprzednim podpunkcie parametrów regulatora, wykreślić charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego w środowisku Matlab. Na podstawie kryterium Nyquista zweryfikować stabilność układu regulacji.

4.5 Obliczyć bieguny transmitancji $G_z(s)$ dla wybranych parametrów regulatora i przedstawić je na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s. W środowisku Simulink zbadać odpowiedzi skokowe i skomentować je w odniesieniu do położenia biegunów transmitancji.