Podstawy Automatyki

Politechnika Poznańska
Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów

ĆWICZENIE 4

Odpowiedzi czasowe podstawowych elementów dynamicznych.

Ćwiczenie ma na celu poznanie odpowiedzi skokowych i impulsowych podstawowych elementów dynamicznych. Podczas ćwiczenia przebadany zostanie wpływ zmiany parametrów obiektów na te charakterystyki. W ćwiczeniu przedstawiona zostanie także metoda aproksymacji obiektów inercyjnych wyższych rzędów, za pomocą obiektu inercyjnego I-go rzędu z opóźnieniem.

1 Wprowadzenie

W większości przypadków możliwe jest opisanie układu dynamicznego za pomocą równania różniczkowego postaci:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

przy czym $m \leq n$ oraz $y(t)$ jest wyjściem układu, natomiast $u(t)$ jest sygnałem wejściowym układu.

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego całkowicie określa właściwości dynamiczne, czyli zachowanie dynamiczne, badanego układu. Często jednak potrzebna jest znajomość właściwości ogólnych układu, niezależnych od rodzaju wymuszenia. Z tego względu wykorzystuje się przekształcenie całkowe Laplace'a, dzięki któremu właściwości dynamiczne układu są przedstawione w sposób przejrzysty.

Przy założeniu zerowych warunków początkowych, po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a, równanie (1) można przedstawić w postaci:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s). \tag{2}$$

Stosunek transformaty Laplace'a wielkości wyjściowej $Y(s)$ układu do transformaty Laplace'a wielkości wejściowej $U(s)$ układu, przy zerowych warunkach początkowych, nazywana jest transmitancją operatorową układu $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{3}$$

Pierwiastki licznika transmitancji nazywane są zerami transmitancji, natomiast pierwiastki mianownika określa się mianem biegunów transmitancji.

Transmitancja operatorowa, lub inaczej funkcja przejścia, nie zależy od postaci sygnału wejściowego $x(t)$. Dla danego układu transmitancja jest wielkością stałą zależną jedynie od natury fizycznej układu, a więc od równania różniczkowego i parametrów układu. Znając transmitancję $G(s)$ oraz sygnał wejściowy $u(t)$, można wyznaczyć odpowiedź układu $y(t)$ korzystając z następującej relacji:

$$y(t) = \alpha^{-1}\left\{G(s)\alpha[u(t)]\right\}. \tag{4}$$

Właściwości układów liniowych można opisać nie tylko za pomocą równań lub transmitancji, ale również za pomocą charakterystyk czasowych, a więc przebiegów w czasie odpowiedzi układu na pewne typowe wymuszenia. Za typowe wymuszenia przyjęto następujące sygnały:

- skok jednostkowy (inaczej funkcja Heaviside'a): $1(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \geq 0 \end{cases}$;
- impuls Diraca: $\delta(t) = \begin{cases} 0; & t \neq 0 \\ \infty; & t = 0 \end{cases}$, będącą pochodną względem czasu skoku jednostkowego. Dodatkowo słuszna jest następująca zależność: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.

Ważne mogą się okazać również transformaty Laplace'a opisanych wyżej wymuszeń:

$$\alpha[\delta(t)] = 1; \tag{5}$$

$$\alpha[1(t)] = \frac{1}{s}. \tag{6}$$

Jeżeli wymuszenie działające na wejściu układu ma postać skoku jednostkowego, wówczas odpowiedź układu nazwana jest charakterystyką skokową lub odpowiedzią skokową i jest oznaczona jako $h(t)$. Jeśli sygnał wejściowy układu stanowi impuls Diraca, to odpowiedź układu nazwana jest charakterystyką impulsową bądź odpowiedzią impulsową i jest oznaczana przez $g(t)$.

Na bazie relacji zawartych powyżej, można określić ogólną postać odpowiedzi czasowych:

$$h(t) = \alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}; \tag{7}$$

$$g(t) = \alpha^{-1}\left\{G(s)\right\}. \tag{8}$$

Z powyższych zależności widać, że charakterystyka impulsowa stanowi oryginał transmitancji operatorowej układu. Można również zauważyć, że charakterystyka impulsowa jest pochodną charakterystyki skokowej. Równania (7) oraz (8) umożliwiają obliczenie analitycznych postaci odpowiedzi skokowych i impulsowych obiektów dynamicznych o znanej transmitancji.

2 Badanie odpowiedzi czasowych podstawowych liniowych obiektów dynamicznych SISO

Specjalnym rozszerzeniem pakietu Matlab, opracowanym z myślą o modelowaniu, symulacji i doborze układów sterowania jest pakiet narzędziowy Control System Toolbox. Jest to zbiór algorytmów, zapisanych przeważnie w postaci m-plików, stanowiących implementację mechanizmów powszechnie spotykanych przy opracowywaniu, analizie i modelowaniu układów regulacji automatycznej. Systemy sterowania mogą być modelowane zarówno jako systemy ciągłe jak i dyskretne, przy czym możliwa jest oczywiście konwersja między różnymi formatami modelu. Dzięki pakietowi Control System Toolbox możliwe jest badanie odpowiedzi czasowych, częstotliwościowych, lokowanie biegunów, opracowywanie sterowań optymalnych i wiele innych.

Do tworzenia modeli obiektów liniowych dedykowane są funkcje *tf*, *zpk* oraz *ss*. Funkcja *ss* służy do generowania modelu w przestrzeni stanów i nie będzie szerzej opisywana w tym opracowaniu.

Funkcja `tf` pozwala na modelowanie obiektów liniowych za pomocą transmitancji. Przy wywołaniu tej funkcji jako pierwszy parametr podaje się wektor zawierający kolejne współczynniki wielomianu licznika transmitancji, natomiast drugi parametr powinien zawierać wektor ze współczynnikami wielomianu mianownika transmitancji układu. Przykładowy model utworzony za pomocą tej funkcji może wyglądać następująco:

```
>> licznik = [3 2 1];
>> mianownik = [5 4 3 2 1 0];
>> transmitancja_obiektu = tf(licznik, mianownik)
Transfer function:
          3 s^2 + 2 s + 1
 --------------------------------
 5 s^5 + 4 s^4 + 3 s^3 + 2 s^2 + s
```

Warto zauważyć, że współczynniki wielomianów podaje się rozpoczynając od tego, który stoi przy najwyższej potędze zmiennej operatorowej s, w kolejności ku wykładnikom malejącym. Jeśli dany wielomian nie zawiera którejś z potęg zmiennej operatorowej s, wtedy w wektorze należy wpisać 0.

Dodatkowo, wywołując funkcję `tf` można określić wartość opóźnienia członu opóźniającego:

```
>> transmitancja_obiektu = tf([2 1], [1 1 10], 'OutputDelay', 1.5)
Transfer function:
                2 s + 1
exp(-1.5*s)* ------------
             s^2 + s + 10
```

W celu wygenerowania modelu obiektu w postaci dyskretnej, należy podać trzeci parametr, będący czasem próbkowania, dla którego model ma być wygenerowany, jak w przykładzie poniżej:

```
>> czas_probkowania = 2;
>> transmitancja_obiektu = tf(licznik, mianownik, czas_probkowania)
Transfer function:
          3 z^2 + 2 z + 1
 --------------------------------
 5 z^5 + 4 z^4 + 3 z^3 + 2 z^2 + z
Sampling time:  2
```

Jak widać, utworzony model wykorzystuje dyskretną zmienną operatorową z w przeciwieństwie do modelu ciągłego, opartego na zmiennej s.

Inną funkcją służącą do tworzenia transmitancji modelu, jest funkcja *zpk*. Tworzy ona model w oparciu o 3 wektory podane jako parametry w wywołaniu tej funkcji. Pierwszy wektor zawiera zera transmitancji, drugi – bieguny, natomiast trzeci parametr to wektor wzmocnień. Podobnie jak w przypadku funkcji *tf*, możliwe jest również generowanie modelu w postaci dyskretnej, co wymaga podania czwartego parametru, będącego okresem próbkowania.

```
>> zera = [1 2 3];
>> bieguny = [-1 1 -2 4];
>> wzmocnienia = [2];
model_zpk = zpk(zera, bieguny, wzmocnienia)
Zero/pole/gain:
     2(s-1)(s-2)(s-3)
 -----------------------
   (s+1)(s+2)(s-1)(s-4)
```

Po utworzeniu transmitancji obiektu można przebadać jego odpowiedzi czasowe. Funkcja *step* służy do obliczania odpowiedzi skokowej, a funkcja *impulse* – odpowiedzi impulsowej obiektu.

```
>> step(transmitancja_obiektu)
>> impulse(transmitancja_obiektu)
```

Funkcje wywołane bez podania argumentów wyjściowych, powodują otworzenie nowego okna wykresu zawierającego odpowiednie odpowiedzi czasowe. W przypadku wywołania funkcji z parametrami wyjściowymi:

```
>> [y, t] = step(transmitancja_obiektu)
>> [y, t] = impulse(transmitancja_obiektu)
```

nastąpi przypisanie zmiennej y wartości odpowiedzi (skokowej lub impulsowej), a zmiennej t wektora czasu wykorzystanego w symulacji. Nowe okno wykresu nie zostanie otwarte a nowy wykres nie zostanie stworzony. Funkcje można wywołać również bez podawania argumentu wyjściowego t.

2.1 Za pomocą polecenia *tf* utworzyć w Matlabie obiekty o transmitancjach podanych w kolejnych punktach zadania. Dla każdego z elementów wykonać symulację odpowiedzi impulsowej, za pomocą polecenia *impulse,* oraz odpowiedzi skokowej, za pomocą polecenia *step.* Przeanalizować wpływ zmiany wartości parametrów danych transmitancji, posługując się poleceniem *hold on.*

2.2 Obiekt proporcjonalny (parametr k):

$$G(s) = k$$

2.3 Obiekt inercyjny I-go rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{sT+1}$$

2.4 Obiekt inercyjny II-go rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{(sT+1)^2}$$

2.5 Obiekt oscylacyjny (parametry k, T_n, ξ):

$$G(s) = \frac{k}{s^2T_n^2+2\xi T_n s+1}$$

2.6 Obiekt inercyjny 5-tego rzędu (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{(sT+1)^5}$$

2.7 Obiekt całkujący idealny (parametr k):

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

2.8 Obiekt całkujący rzeczywisty (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{k}{s(sT+1)}$$

2.9 Obiekt różniczkujący rzeczywisty (parametry k i T):

$$G(s) = \frac{sk}{sT+1}.$$

3 Aproksymacja statycznego obiektu inercyjnego wyższego rzędu za pomocą obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem

Często w praktyce stosuje się uproszczenie modelu obiektów nieoscylacyjnych wyższego rzędu. Uproszczenie to zmniejsza złożoność struktury modelu oraz ilość zastosowanych parametrów. Możliwe jest przybliżenie transmitancji operatorowej elementu inercyjnego n-tego rzędu (n > 1) transmitancją elementu inercyjnego I-go rzędu z opóźnieniem, przy zachowaniu bardzo zbliżonych właściwości dynamicznych. Ogólnie zadanie aproksymacji polega na zastąpieniu obiektu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)...(1+sT_n)}$$

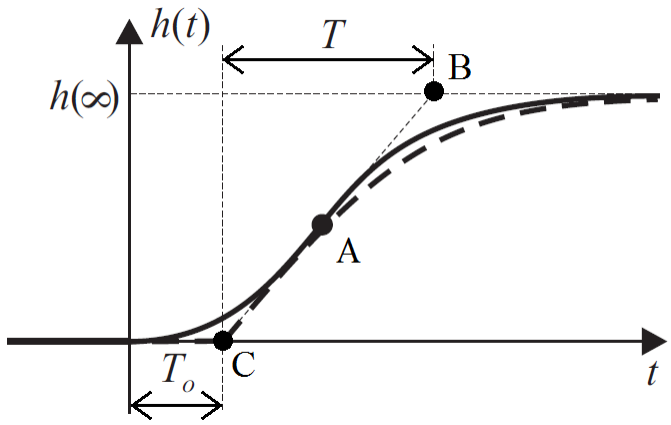
obiektem inercyjnym I-go rzędu z opóźnieniem, o transmitancji danej wzorem:

$$G_a(s) = \frac{k}{(1+sT)} e^{-sT_0}.$$

Aproksymacji dokonuje się na bazie odpowiedzi skokowej obiektu aproksymowanego. Aby określić parametry T i T_0 należy na odpowiedzi skokowej obiektu inercyjnego wyższego rzędu (Rys. 1) wyznaczyć punkt przegięcia (punkt A) i wykreślić styczną w tym punkcie (BC).

Algorytm aproksymacji składa się z następujących kroków:

- wykreślenie odpowiedzi skokowej obiektu oryginalnego (aproksymowanego);
- wykreślenie odpowiedzi impulsowej obiektu oryginalnego (odpowiedź impulsowa jest pochodną odpowiedzi skokowej);
- odczytanie czasu, w którym odpowiedź impulsowa przyjmuje maksymalną wartość (odpowiada czasowi punktu przegięcia wykresu odpowiedzi skokowej [punkt A z Rys. 1]);
- odczytanie maksymalnej wartości odpowiedzi impulsowej (równoznaczne z wartością współczynnika nachylenia prostej stycznej do punktu przegięcia odpowiedzi skokowej);
- wykreślenie stycznej BC na bazie odczytanych wartości (z równania krzywej $y = ax+b$, gdzie a jest odczytane w poprzednim punkcie, natomiast b można obliczyć na bazie współrzędnych punktu A z Rys. 1);
- odczytanie czasu T_0 w punkcie B;
- odczytanie czasu T pomiędzy punktami B i C;



Rysunek 1: *Ideowe przedstawienie aproksymacji w oparciu o odpowiedź skokową obiektu. Linia ciągła – odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego wyższego rzędu, linia przerywana – odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego I-go rzędu z opóźnieniem.*

- zamodelowanie obiektu inercyjnego I-go rzędu przybliżającego obiekt oryginalny, na bazie otrzymanych wartości.

3.1 Dokonać aproksymacji obiektu inercyjnego IV-go rzędu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{k}{(sT_1+1)^4}$$

za pomocą obiektu o transmitancji:

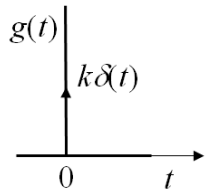
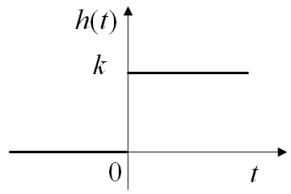
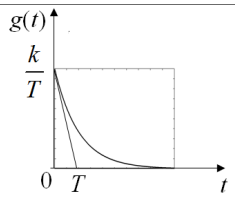
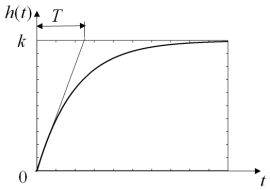
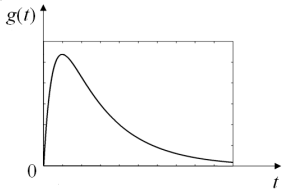
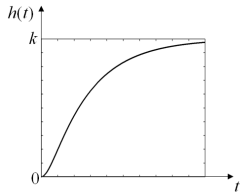
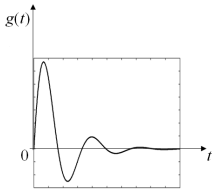
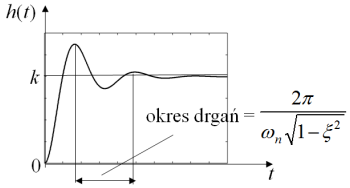
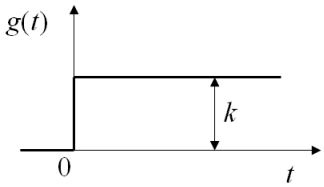
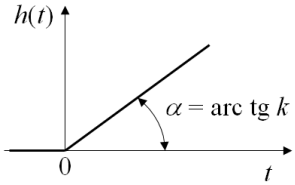
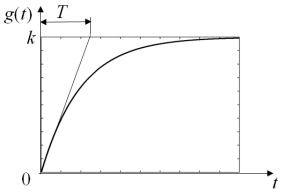
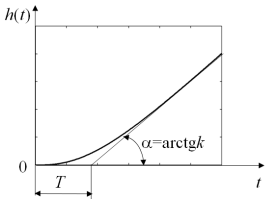
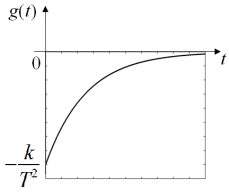
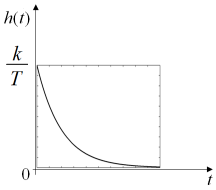
$$G_a(s) = \frac{k}{(sT+1)} e^{-sT_0}$$

dla wybranych wartości k oraz T_1. Określić parametry T oraz T_0 obiektu inercyjnego I-go rzędu z opóźnieniem.

3.2 Porównać odpowiedzi skokowe obu obiektów za pomocą środowiska Simulink. Do budowy obiektów należy wykorzystać bloki TransferFcn i TransportDelay biblioteki Continuous. Następnie należy podać na wejście obiektów skok jednostkowy: blok Step w bibliotece Sources. Odpowiedź eksportować do Workspace za pomocą bloku To Workspace z biblioteki Sinks. Wykresy umieścić na wspólnym oknie wykresu posługując się poleceniami *plot* oraz *hold on*.

Dodatek

Odpowiedzi czasowe podstawowych obiektów dynamicznych

Nazwa obiektu	Odpowiedź impulsowa	Odpowiedź skokowa
Proporcjonalny		
Inercyjny I-go rzędu		
Inercyjny II-go rzędu		
Oscylacyjny		
Całkujący idealny		
Całkujący rzeczywisty		
Różniczkujący rzeczywisty		

Tablica 1: *Odpowiedzi czasowe podstawowych obiektów dynamicznych.*